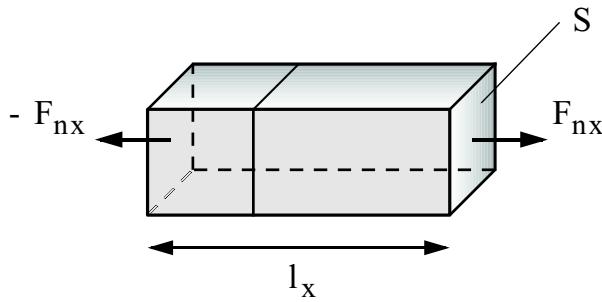


Déformations des solides: Elasticité

- Traction simple

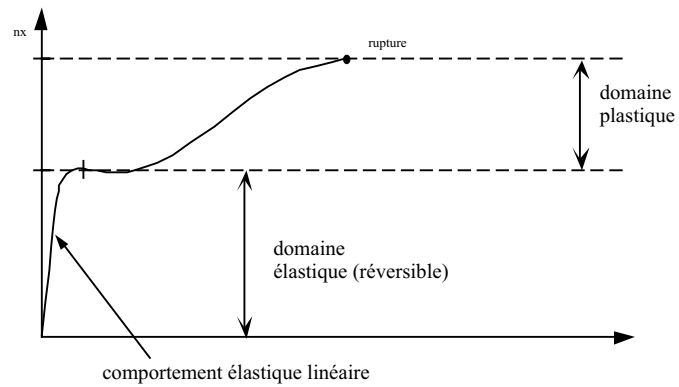


$$\sigma_{nx} = \frac{F_{nx}}{S} \text{ contrainte normale}$$

Par convention, $\sigma_{nx} > 0$ si traction

$$\varepsilon_{nx} = \frac{\Delta l_x}{l_x} \text{ allongement spécifique}$$

Le domaine dans lequel la relation entre force et déformation est **réversible et linéaire** est dit **domaine élastique linéaire**. C'est une région de la relation entre force et déformation, correspondant à de **faibles déformations**.



L'expérience montre que :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_{nx}}{E} & \text{loi de Hooke, } E = \text{module de Young} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_{nx}}{E} & \text{loi de Poisson, } \mu = \text{module de Poisson} \end{cases}$$

- Principe de superposition

La déformation due à un ensemble de contraintes est égale à la somme des déformations de chaque contrainte agissant individuellement. Pour un solide isotrope :

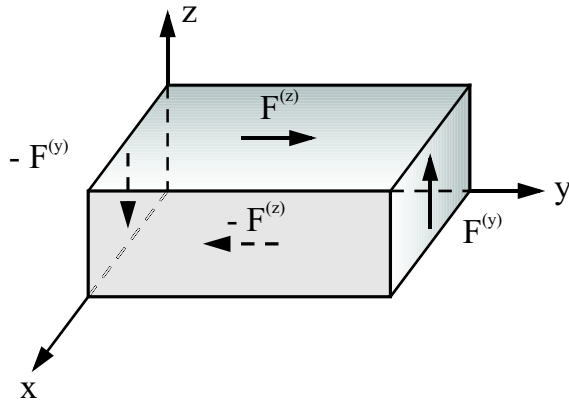
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

- **Compression uniforme** ($\sigma_{nx} = \sigma_{ny} = \sigma_{nz} = \sigma < 0$)

Le **coefficient de compressibilité** κ est défini par :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \kappa \sigma \quad \text{où} \quad \kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}$$

- **Cisaillement simple**



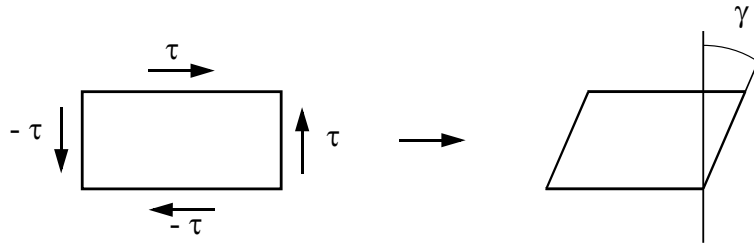
$$F^{(z)} = (0, F^{(z)}, 0)$$

$$F^{(y)} = (0, 0, F^{(y)})$$

contraintes **tangentielles**

$$\tau^{(z)} = \frac{F^{(z)}}{S^{(z)}} ; \quad \tau^{(y)} = \frac{F^{(y)}}{S^{(y)}}$$

on montre que $\tau^{(z)} = \tau^{(y)} = \tau$



Loi du cisaillement: $\gamma = \frac{\tau}{G}$ où $G = \text{module de cisaillement} = \frac{E}{2(1+\mu)}$

Toute déformation peut être décrite par la superposition de tractions et de cisaillements simples.

- **Energie mécanique élastique**

$$W_{\text{traction simple}} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_x \sigma_x\right) \cdot \text{volume}$$

$$W_{\text{cisaillement}} = \left(\frac{1}{2}\gamma \tau\right) \cdot \text{volume}$$

$$W_{\text{compression uniforme}} = \frac{1}{2} \underbrace{(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}_{\frac{\Delta V}{V}} \cdot |\sigma| \cdot \text{volume}$$

Phénomènes ondulatoires : Notions générales

• Quelques définitions

Une **onde** est un phénomène dans lequel une perturbation se propage à vitesse finie, sans transport de matière.

Le **vecteur déplacement** d'une onde au temps t , noté $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ est le vecteur caractérisant le déplacement d'un volume infinitésimal du milieu dans lequel se propage l'onde **situé à l'endroit \vec{r} avant le passage de l'onde.**

Une onde est dite **longitudinale** si le vecteur déplacement est parallèle à la direction de propagation. Elle est dite **transversale** si le vecteur déplacement est perpendiculaire à la direction de propagation.

La **célérité** u d'une onde est la vitesse de propagation d'une onde sinusoïdale. Dans le cas où la célérité dépend de la longueur d'onde, on dit que le milieu dans lequel se propage l'onde est **dispersif**.

Une **surface d'onde** est le lieu des points ayant, à un instant donné, la même amplitude du vecteur déplacement. Une onde est dite **sphérique** si les surfaces d'onde sont des sphères, elle est dite **plane** si les surfaces d'onde sont des plans.

Une onde $\xi(x, t)$ est dite **progressive** si elle se propage dans le sens des x croissants, elle est dite **rétrograde** si elle se propage dans le sens des x décroissants.

• Equation d'onde

L'équation d'onde à une dimension s'écrit de façon générale :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Elle a pour solution générale : $\xi(x, t) = f(x - ut) + g(x + ut)$, où $f(x - ut)$ correspond à une onde progressive et $g(x + ut)$ à une onde rétrograde.

Dans le cas général et à trois dimensions, l'équation d'onde s'écrit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = u^2 \nabla^2 f$$

où f correspond à l'une des composantes de $\vec{\xi}$, à la pression, à une composante du champ électrique ou du champ magnétique pour une onde EM, etc.

• Onde sinusoïdale

Une onde sinusoïdale à une dimension peut s'écrire:

$$\xi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$$

où:

k est le nombre d'onde	$k = 2\pi/\lambda$	$\lambda =$ longueur d'onde
ω est la pulsation	$\omega = 2\pi\nu$	$\nu =$ fréquence
T est la période	$T = 1/\nu$	

Ces grandeurs sont reliées par la relation: $u = \lambda\nu = \omega/k$

• Célérité de diverses ondes

– Ondes élastiques

Onde longitudinale dans un barreau: $u = \sqrt{E/\rho}$

Onde transversale de cisaillement ou de torsion: $u = \sqrt{G/\rho}$

Onde longitudinale dans un milieu étendu: $u = \sqrt{E^*/\rho} = 1.16 \sqrt{E/\rho}$ pour $\mu = 0.3$

– Ondes de pression

1. Onde dans un liquide: $u = 1/\sqrt{\chi\rho}$ où χ est le coefficient de compressibilité
 Dans le cas de l'eau : $u = 1440$ m/s

2. Onde dans un gaz (parfait) adiabatique: $u = \sqrt{\gamma RT/M}$
 où $\gamma = C_p/C_v = 1.4$, $R =$ cte des gaz parfaits, $M =$ masse molaire.

– Ondes sur une corde

$u = \sqrt{T/\rho_l}$ où T est la tension et ρ_l est la masse par unité de longueur de la corde.

– Onde à la surface d'un liquide

$$u = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \right) \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$$

où g est la constante de gravitation, ρ la masse spécifique, λ la longueur d'onde, γ la tension superficielle et h la hauteur du liquide

$h > \lambda$	$\lambda > 5$ cm	$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$	onde de gravité
---------------	------------------	------------------------------------	-----------------

	$\lambda < 5$ cm	$u = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$	onde capillaire
--	------------------	---	-----------------

$h < \lambda$		$u = \sqrt{gh}$	onde en eau peu profonde
---------------	--	-----------------	--------------------------

• Aspects énergétiques

- La **densité d'énergie** $e(x, t)$ d'une onde est l'énergie par unité de volume associée au passage de l'onde. Elle est la somme de la densité d'énergie cinétique et de la densité d'énergie potentielle. Pour une onde **progressive** (ou **rétrograde**) se propageant dans un milieu matériel de densité ρ :

$$e(x, t) = \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

Dans le cas d'une **superposition** d'une onde progressive et d'une onde rétrograde, il faut introduire explicitement la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. Pour une onde à une dimension se propageant dans un milieu matériel :

$$e(x, t) = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho u^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

- La **densité d'énergie moyenne** $\langle e \rangle$ est définie par :

$$\langle e(x) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e(x, t) dt$$

Pour une onde sinusoïdale progressive (ou rétrograde) d'amplitude A :

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

- L'**intensité** d'une onde est l'énergie transmise en moyenne par unité de temps à travers une surface unité perpendiculaire à la direction de propagation:

$$I = u \langle e \rangle$$

(NB: dans un milieu dispersif, remplacer la célérité par la vitesse de groupe!)

Pour une onde sinusoïdale :

$$I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2$$

- Pour une **onde de pression** progressive ou rétrograde :

$$I = \frac{1}{\rho u} \langle \Delta p^2(x, t) \rangle$$

Le **niveau d'intensité acoustique**, mesuré en décibels, est donné par :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{où } I_0 \text{ est une intensité de référence égale à } 10^{-12} \text{ W/m}^2.$$

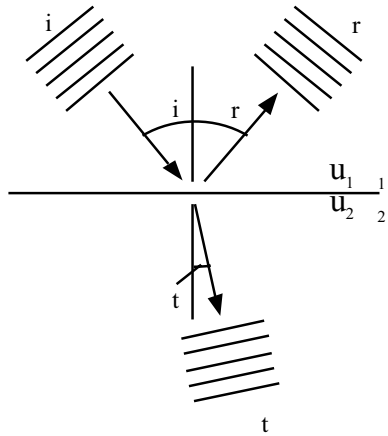
Phénomènes ondulatoires: Composition d'ondes

• Principe de superposition

La somme algébrique de deux solutions de l'équation d'onde $\xi = \xi_1 + \xi_2$ est aussi une solution. Pour superposer deux ondes, il suffit d'additionner les vecteurs déplacement ξ (valable pour de **petites** déformations du milieu):

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \quad \Rightarrow \quad I \sim \xi^2 \sim \xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2$$

• Réflexion et réfraction

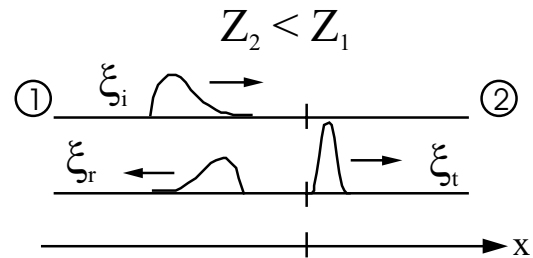
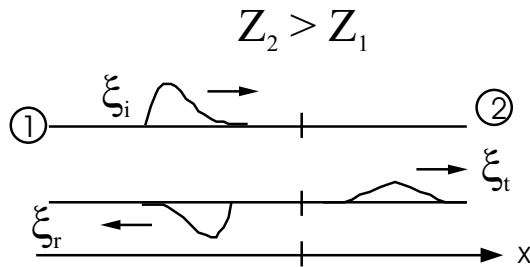


Pour une onde EM:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Pour $n_1 > n_2$ et $\sin \theta_i > n_2/n_1$
 \Rightarrow réflexion totale.

• Réflexion d'ondes



$$\xi_i(x, t) = A_i \cos(k_1 x - \omega t)$$

$$\xi_r(x, t) = A_r \cos(-k_1 x - \omega t + \varphi_r)$$

$$\xi_t(x, t) = A_t \cos(k_2 x - \omega t + \varphi_t)$$

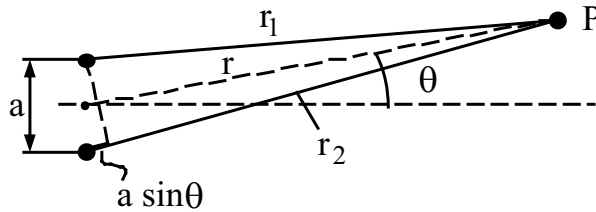
$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{|Z_1 - Z_2|}{Z_1 + Z_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_r}{I_i} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad \varphi_r = 0 \text{ si } Z_2 < Z_1; \varphi_r = \pi \text{ si } Z_2 > Z_1$$

$$\frac{A_t}{A_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad \varphi_t = 0 \text{ quels que soient } Z_1 \text{ et } Z_2$$

- **Phénomène d'interférence**

Deux sources sont dites **cohérentes** si elles ont la même fréquence et si leur différence de phase relative ne dépend pas du temps.

On obtient un phénomène d'**interférence** lorsqu'on superpose les ondes émises par deux (ou plusieurs) sources cohérentes et que l'on observe leur intensité en fonction de l'espace. L'interférence est dite **constructive** lorsque les vecteurs amplitudes des ondes s'ajoutent, elle est dite **destructive** lorsqu'ils se soustraient.



Lorsque les deux sources sont en phase, la position où l'amplitude est maximum est donnée par

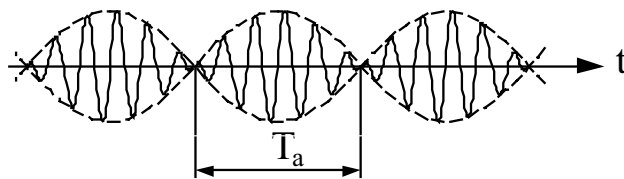
$$r_1 - r_2 = n\lambda$$

Pour deux sources **cohérentes**, l'**intensité** en un point n'est **pas égale** à la **somme des intensités** des deux sources. Dans le cas où les deux sources sont en phase et r (distance au point de mesure) $\gg a$, l'intensité est:

$$I = 4I_0(r) \cos^2 \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)$$

- **Battements**

On obtient un **battement** lorsqu'on superpose deux ondes de fréquences ν_1 et ν_2 différentes et qu'on les observe en un point fixe.

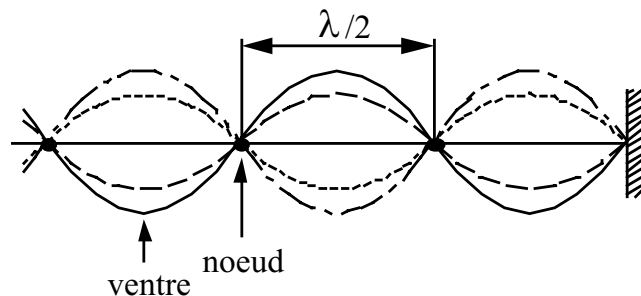


période de battement:
 $T_a = 2\pi / (\omega_1 - \omega_2)$

$$\xi(t) = 2A \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right)$$

- **Ondes stationnaires**

Une onde stationnaire s'obtient par la superposition de deux ondes de même fréquence et se propageant en sens contraire (onde progressive et rétrograde).



$$\xi(x, t) = A \sin(kx) \sin(\omega t + \varphi)$$

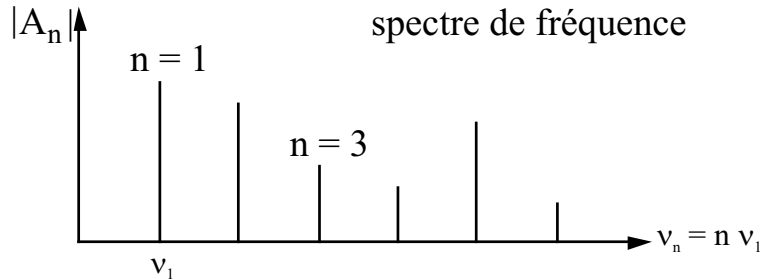
De façon générale, une onde stationnaire à trois dimensions est donnée par:

$$\xi(x, y, z, t) = \sum_n \Phi_n(x, y, z) \theta_n(t)$$

Pour les modes propres d'une corde tendue de longueur ℓ dont les deux extrémités sont fixes, la longueur ℓ est un multiple de la demi-longueur d'onde. Les fréquences de vibrations, notées **fréquences propres** sont un multiple de la **fréquence fondamentale** donnée par $\nu = u/(2\ell)$. Les vibrations de fréquences propres supérieures à la fréquence fondamentale sont les **harmoniques**.

Le **timbre** d'un son ou d'un instrument est relié à l'amplitude A_n des harmoniques formant le son. Dans le cas d'un instrument à cordes, on a:

$$\xi(x, t) = \sum_n A_n \sin(n\pi x/l) \cos(2\pi n\nu_1 t + \Phi_n)$$



• Effet Doppler

Si la source (vitesse v_s) et/ou l'observateur (vitesse v_o) se déplacent par rapport au milieu dans lequel l'onde se propage, la fréquence perçue par l'observateur ν_o est reliée à la fréquence émise ν_s par la relation suivante:

$$\nu_o = \frac{u - v_{oz}}{u - v_{sz}} \nu_s$$

où l'abscisse z de l'observateur est supérieure à celle de la source. Pour le cas d'une onde EM:

$$\nu_o = \frac{1 \pm v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \nu_s$$

où v est la vitesse relative entre source et observateur et le signe $+$ ($-$) correspond au cas de rapprochement (éloignement).

Onde de choc: On obtient une onde de choc lorsque la source se déplace à une vitesse supérieure à la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu. Les fronts d'onde forment un cône d'angle θ tel que $\sin \theta = u/v_s$.

• Vitesse de groupe

La **vitesse de groupe** d'un pulse est la vitesse de propagation du maximum d'amplitude du pulse.

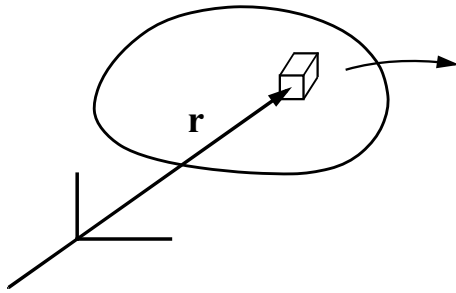
La **vitesse de phase** (ou célérité) est la vitesse à laquelle les oscillations individuelles du pulse se propagent.

Dans un **milieu dispersif** [où la célérité $u(\lambda)$ dépend de la longueur d'onde], on a:

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = u - \lambda \frac{du}{d\lambda} \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu$$

Electrostatique

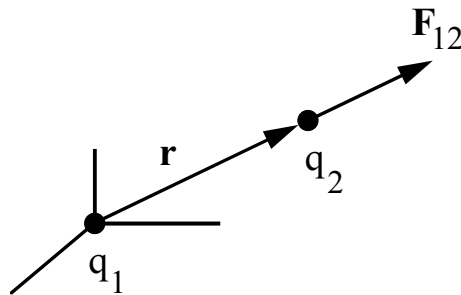
- L'électrostatique est l'étude des systèmes formés de charges fixes.
- La densité de charge volumique $\rho(\vec{r})$ est définie par:



volume $\Delta\tau$ contenant la charge ΔQ

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta\tau}$$

- A la base de l'électrostatique, il y a:
 - La loi de Coulomb



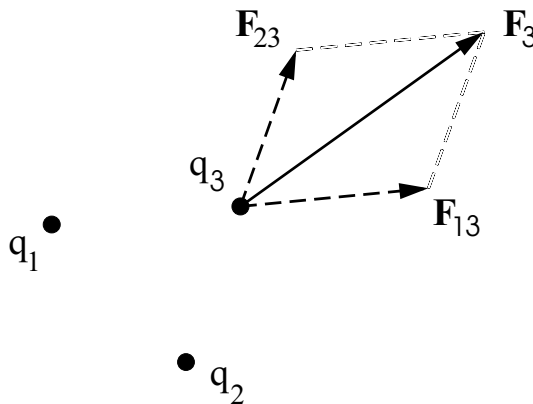
\vec{F}_{12} = force exercée par q_1 sur q_2 :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

ϵ_0 = permittivité du vide

$$\cong 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{V}\cdot\text{m}}$$

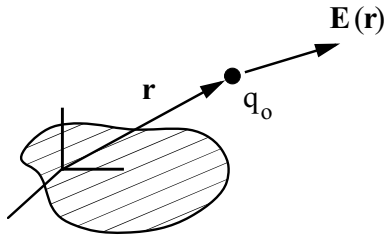
- Le principe de superposition



$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

- **Champ électrique**

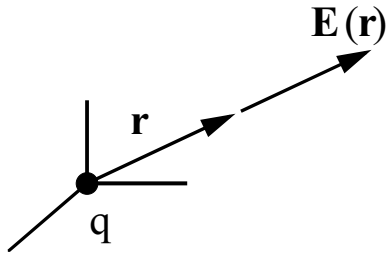
Le **champ électrique** $\vec{E}(\vec{r})$ créé en un point \vec{r} par les charges fixes d'un système est défini par:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0}$$

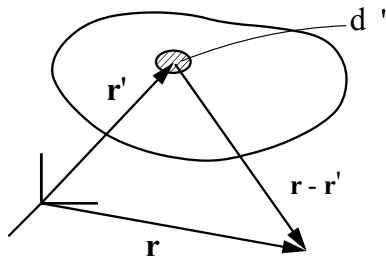
$\vec{F}(\vec{r})$ = force exercée par le système de charges sur q_0

– Champ électrique d'une **charge ponctuelle**



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

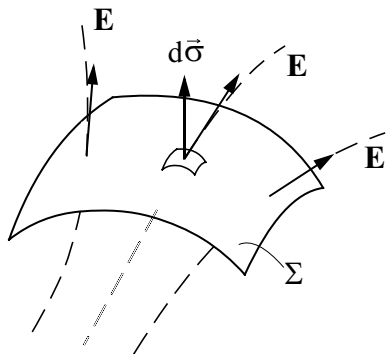
– Champ électrique d'une **distribution continue** de charges



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

- **Première loi de l'électrostatique**

– Le **flux** de \vec{E} à travers une surface Σ (ouverte ou fermée) est défini par:



$$\Phi_E = \int \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma}$$

Pour une **surface fermée**, $d\vec{\sigma}$ est toujours orienté vers l'extérieur.

– **Loi de Gauss:** le flux de \vec{E} à travers une surface Σ fermée est égal à Q/ϵ_0 où Q est la somme des charges contenues dans le volume Ω délimité par Σ :

$$\int \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = Q/\epsilon_0$$

forme globale

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$$

forme locale

- **Seconde loi de l'électrostatique**

- **La circulation de \vec{E}** le long d'un contour fermé Γ est définie par:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- **2ème loi:** la circulation de \vec{E} le long d'un contour fermé est nulle:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

forme globale

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

forme locale

- **Le potentiel électrique**

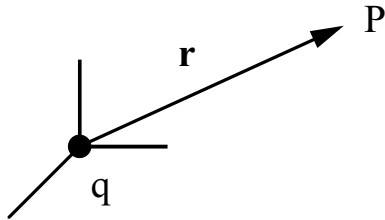
- **Le potentiel électrique $V(P)$** en un point P est défini par:

$$V(P) = - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} + V(P_0)$$

En forme locale: $\vec{E} = -\text{grad } V$.

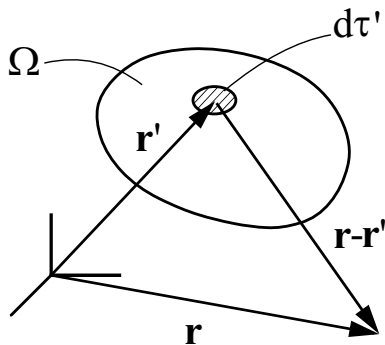
Le potentiel électrique est une **énergie par unité de charge**.

- Potentiel d'une **charge ponctuelle**



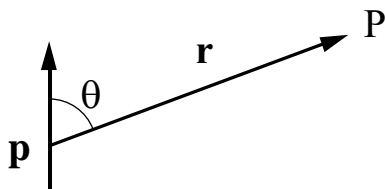
$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

- Potentiel d'une **distribution de charges**



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Potentiel et champ \vec{E} d'un **dipôle électrique** \vec{p} ($p = q\ell$). Pour $r \gg \ell$:



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(\frac{3\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r} - \vec{p} \right)$$

– **Equation du potentiel**

$$\left. \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \vec{E} = -\text{grad } V \end{array} \right\} \implies \nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{équation de Poisson}$$

Hors des charges:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0 \quad \text{équation de Laplace}$$

• **Distribution superficielle de charges**

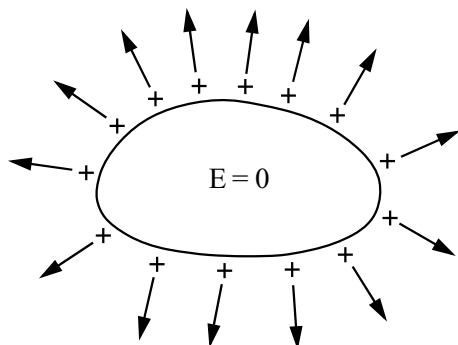
Soit une surface chargée avec une densité superficielle de charge ρ_s . Le champ électrique \vec{E} et le vecteur déplacement \vec{D} de part et d'autre de la surface sont tels que:

$$\begin{array}{ll} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n} = \rho_s & \hat{n} = \text{vecteur unité normal} \\ (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \hat{t} = 0 & \hat{t} = \text{vecteur unité tangent} \end{array}$$

• **Les conducteurs**

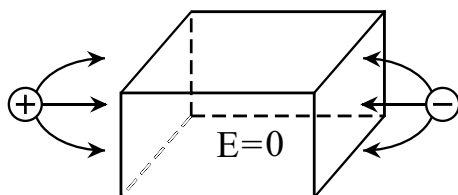
A l'équilibre électrostatique, on peut affirmer que:

– **conducteurs pleins**



- ◇ $E = 0$ dans le conducteur
- ◇ $\rho = 0$ dans le conducteur (les charges sont en surfaces)
- ◇ $\vec{E} \perp$ à la surface
- ◇ $|E| = \rho_s/\epsilon_0$ proche de la surface où $\rho_s =$ densité superficielle de charge

– **conducteurs creux**



- ◇ $E = 0$ à l'intérieur du conducteur creux
- ◇ $\rho = 0$ sur la surface intérieure

• **Les condensateurs**

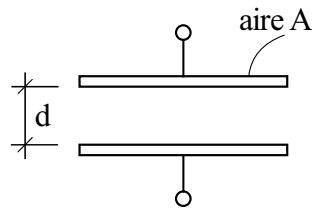
Un **condensateur** est formé de deux conducteurs séparés par un matériau isolant (ou le vide), l'un entourant complètement l'autre.

La **capacité** d'un condensateur C est définie par:

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{où} \quad [C] = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} = F \text{ (Farad)}$$

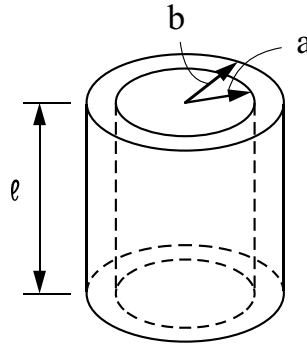
– Condensateur **plan**

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$



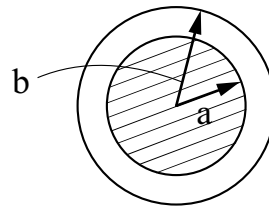
– Condensateur **cylindrique**

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\ell}{\ln(b/a)}$$



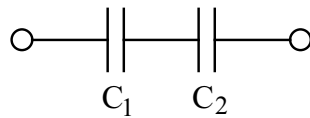
– Condensateur **sphérique**

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1}$$



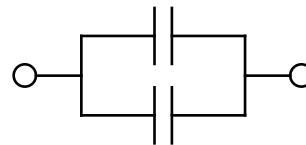
Montage **série**

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



Montage **parallèle**

$$C_p = C_1 + C_2$$



• Energie électrostatique

L'énergie électrostatique U emmagasinée dans un condensateur est donnée par:

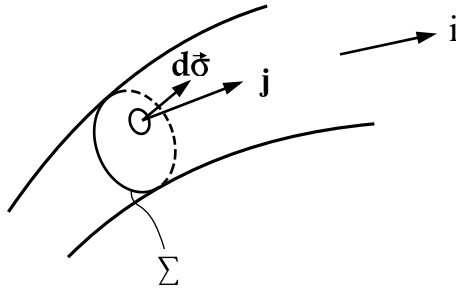
$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

On peut aussi considérer que l'énergie électrostatique est reliée au champ électrique:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad u = \text{densité d'énergie électrostatique}$$

Courant électrique et circuit RC

- Courant i et densité de courant \vec{j}



$$i_{\Sigma} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

ΔQ = charge traversant Σ pendant Δt

On montre que **dans un conducteur**

$$\vec{j} = -ne\langle\vec{v}\rangle = -ne\vec{v}_d$$

$$\langle\vec{v}\rangle = \vec{v}_d = \text{vitesse moyenne} \approx 1 \text{ mm/s}$$

$$|\vec{v}| = \text{vitesse instantanée} \approx 10^8 \text{ cm/s}$$

- Equation de continuité

L' équation de continuité exprime que les charges se conservent
forme globale :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

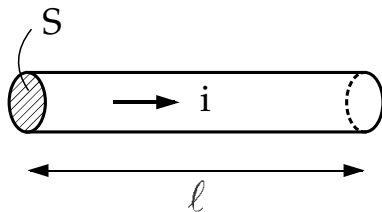
forme locale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

- Résistivité ρ , conductibilité σ , résistance R

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad ; \quad \vec{E} = \rho \vec{j} \quad \text{où} \quad \sigma = 1/\rho$$

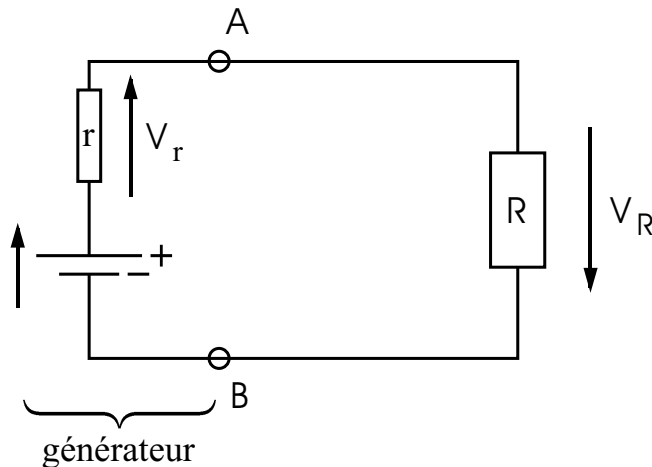
$$\rho = \rho(\text{matériau, défauts, } T, |\vec{E}|)$$



$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\Delta V}{i} = \rho \frac{\ell}{S}$$

- **Force électromotrice (f.e.m.) et générateur**

Un **générateur** est un dispositif qui transforme de l'énergie (mécanique, chimique, etc) en énergie électrique. Il est caractérisé par sa **f.e.m.** ε et sa **résistance interne** r .



La **f.e.m.** ε est le travail/unité de charge fourni par le générateur pour faire passer une charge de B à A .

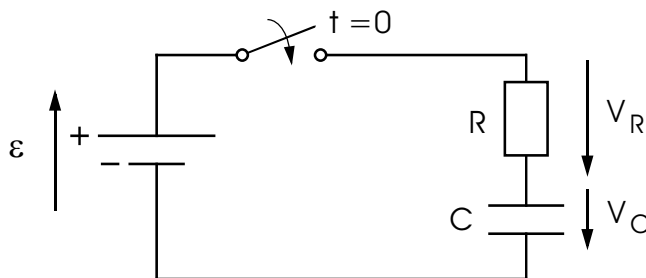
La **résistance interne** r est une mesure de la résistance au déplacement des charges dans le générateur.

$$\varepsilon dq = V_r dq + V_R dq \longrightarrow V_A - V_B = \varepsilon - ri$$

- La **puissance Joule** dissipée dans une résistance R est telle que

$$P = \frac{dW}{dt} = Ri^2$$

- **Charge d'un circuit RC**



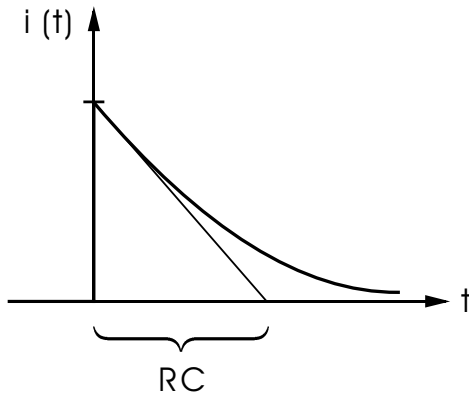
$$V_R = Ri$$

$$V_C = \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot d\tau$$

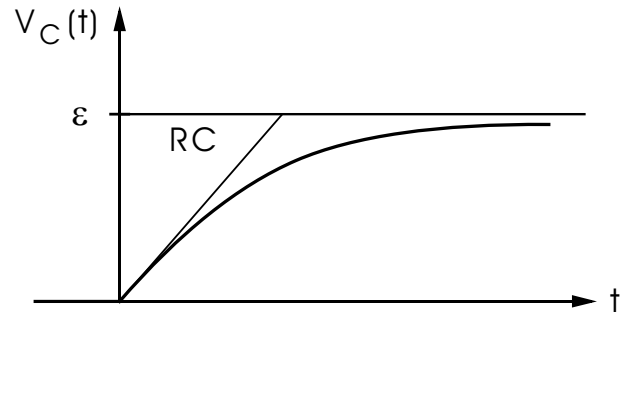
équation du circuit:

$$\varepsilon = Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot d\tau$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0 \quad ; \quad i(t=0) = \frac{\varepsilon}{R}$$

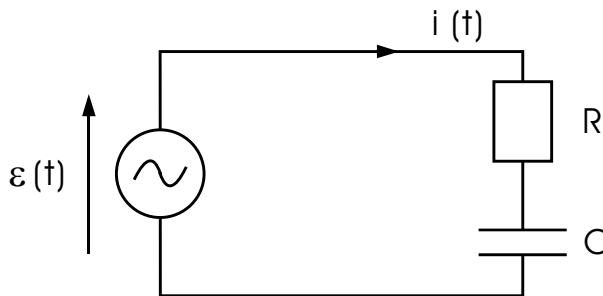


$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \exp(-t/RC)$$



$$V_C(t) = \varepsilon[1 - \exp(-t/RC)]$$

• **Circuit RC alternatif**



$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

équation du circuit:

$$\varepsilon(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot d\tau$$

solution

$$i_0 = \frac{\varepsilon_0}{R} \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}; \quad \tan \varphi = \frac{1}{\omega RC}$$

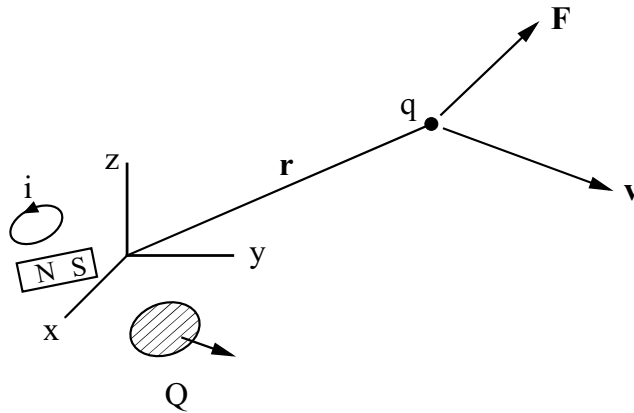
Lorsque $\omega \rightarrow 0$ un condensateur se comporte comme un élément d'**impédance infinie**.

Lorsque $\omega \rightarrow \infty$ un condensateur se comporte comme un élément d'**impédance nulle** (court-circuit):

$$Z = \frac{1}{j\omega C} = \text{impédance complexe}$$

Induction magnétique et les lois fondamentales

- Définition de \vec{B} , force de Lorentz



Soit un système formé de charges (en mouvement ou au repos), de courants, d'aimants, etc. Les propriétés de l'espace autour de ce système sont modifiées et sont caractérisées par deux champs, notés **champ électrique** \vec{E} et **champ d'induction magnétique** \vec{B} , tels que la force exercée sur une charge test q est égale à :

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = q\vec{v}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) + q\vec{E}(\vec{r}, t)$$

\vec{F} est dite **force de Lorentz**, l'expression de \vec{F} n'est pas modifiée en relativité.

- **Mouvement d'une particule dans un champ \vec{B}**

En présence d'un champ \vec{B} **statique** (uniforme ou non) le mouvement d'une particule est un mouvement à énergie constante

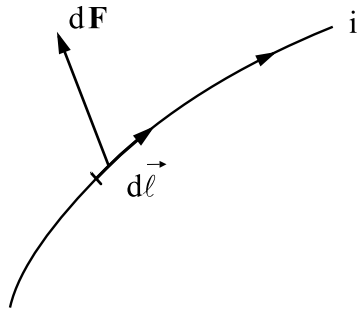
$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

Dans un champ \vec{B} **statique, uniforme**, une particule décrit un mouvement hélicoïdal. Dans le plan perpendiculaire à \vec{B} :

$$\nu = \text{fréquence cyclotronique} = \frac{1}{2\pi} \frac{q}{m} B \cong 2.8 \cdot 10^{10} \text{ Hz/T}$$

$$R = \text{rayon du cercle} = \frac{mv}{qB} = \frac{\sqrt{2mE_{\text{cin}}}}{qB}$$

- **Force sur un conducteur filiforme**



$d\vec{F}$ = force exercée par \vec{B}
sur un élément $d\vec{\ell}$ du fil

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

- **Couple, force exercés sur un moment magnétique $\vec{\mu}$ dans un champ \vec{B}**

Le **moment magnétique** $\vec{\mu}$ est défini par $\vec{\mu} = i\vec{S}$.

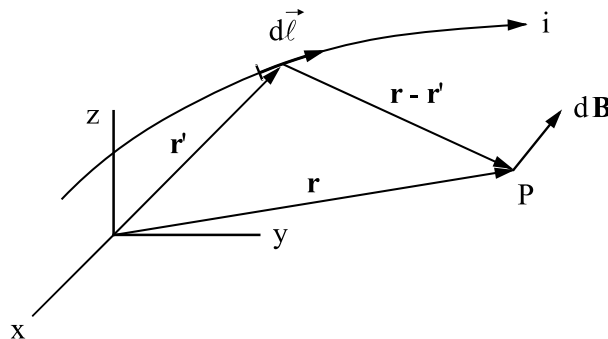
Couple $\vec{\tau}$ exercé sur $\vec{\mu}$ dans \vec{B} uniforme: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$

Force exercée sur $\vec{\mu}$ dans \vec{B} non-uniforme: $F_\alpha = -\vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_\alpha}$ $\alpha = x, y, z$

Energie de $\vec{\mu}$ permanent dans \vec{B} uniforme: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

- **Loi de Biot et Savart**

La loi de Biot et Savart joue en magnétostatique le même rôle que la loi de Coulomb en électrostatique.



Le champ $d\vec{B}$ créé en un point P par un élément de longueur $d\vec{\ell}$ d'un courant i (voir dessin) est tel que :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\mu_0 = \text{perméabilité du vide} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

- **Les lois fondamentales**

- **Première loi**

Elle exprime qu'il n'existe pas de charge magnétique:

$$\iint_{\Sigma \text{ fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

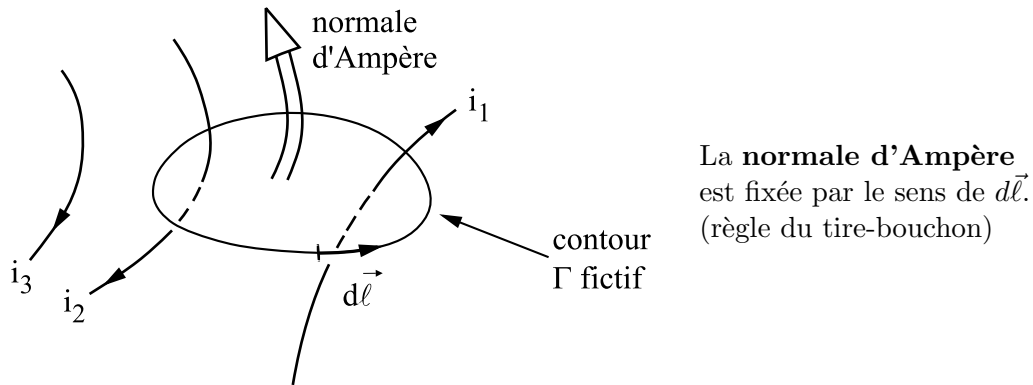
forme globale

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

forme locale

Elle a en particulier pour conséquence que les lignes de champ de \vec{B} sont fermées sur elles-mêmes.

– Loi d'Ampère



La circulation de \vec{B} sur un contour Γ fermé est telle que :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \Sigma i \stackrel{\text{dessin}}{=} \mu_0 (i_1 - i_2)$$

où Σi est la somme des courants traversant la surface sous-tendue par Γ . Les courants sont comptés positivement s'ils sont dans le sens de la normale d'Ampère et négativement s'ils sont dans l'autre sens.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \Sigma i$$

forme globale

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

forme locale

• Le potentiel vecteur \vec{A}

Définition :

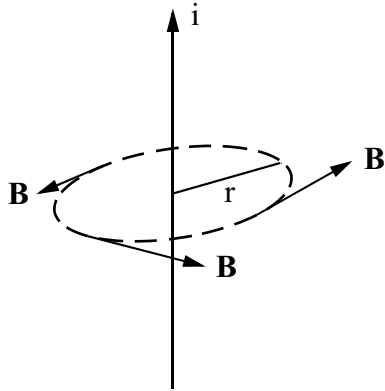
$$\vec{B}(\vec{x}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x})$$

Equation du potentiel vecteur :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

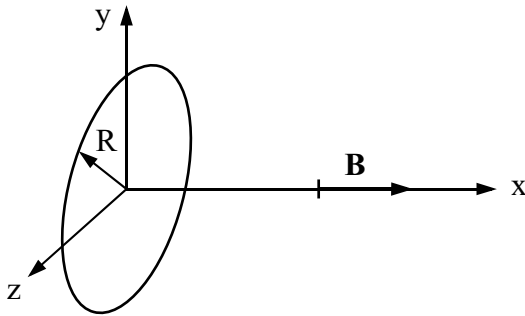
On montre que l'on peut retrouver la loi de Biot et Savart à partir des solutions de l'équation du potentiel vecteur.

• Champs magnétiques de divers courants



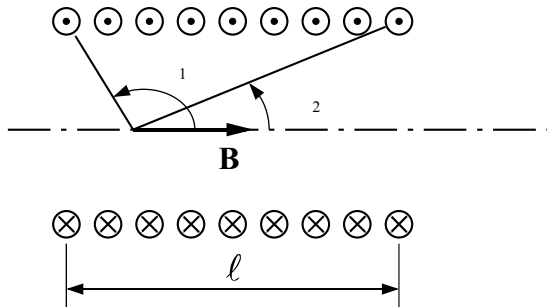
fil rectiligne infini :

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$



champ sur un l'axe d'une spire :

$$B(x) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$



champ sur l'axe d'un solénoïde de N spire et de longueur ℓ :

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2 \ell} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Solénoïde long et mince

$$B = \mu_0 i \frac{N}{\ell}$$

Tore de rayon R

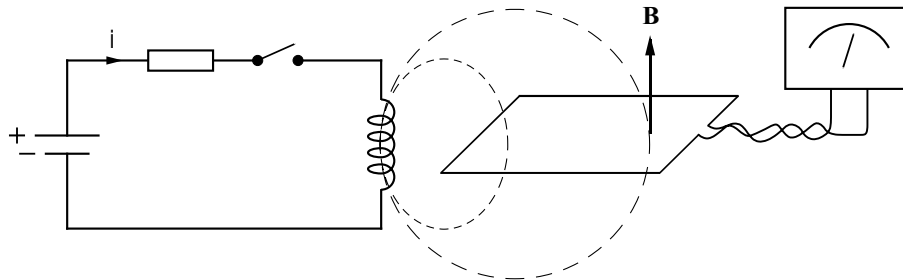
$$B = \mu_0 i \frac{N}{2\pi R}$$

A l'intérieur d'un fil rectiligne de rayon R

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

Induction électromagnétique

- Les expériences de Faraday



L'expérience montre qu'un **courant induit** apparaît dans la spire si :

- a) $i = \text{constant}$, spire et/ou solénoïde en mouvement
- b) $i = i(t)$, spire et solénoïde fixes

L'expérience a) est une conséquence de la force de Lorentz.

L'expérience b) est un **phénomène nouveau** (loi d'induction).

- La loi d'induction

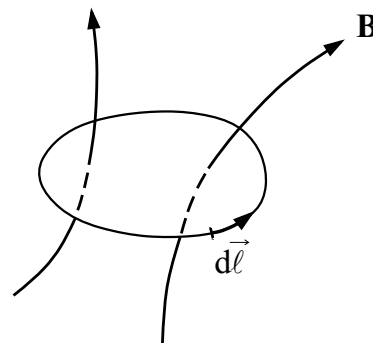
Elle peut s'exprimer sous diverses formes, de généralité croissante.

Enoncé 1

Soit une spire traversée par un champ d'induction magnétique qui dépend du temps. La force électromotrice ε induite dans la spire par la présence de \vec{B} est donnée par

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

où $\Phi = \int \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$
 et $\Sigma =$ surface sous-tendue par la spire de contour Γ



Enoncé 2 (relation entre champs)

A toute variation de \vec{B} en fonction de t on peut associer un champ \vec{E} tel que

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} \quad \text{ou sous forme locale :} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- **La loi de Lenz**

Ce n'est pas une nouvelle loi, elle "explícite" le signe moins qui apparaît dans la loi d'induction. On peut l'exprimer de façon générale par l'expression: **l'effet s'oppose à la cause**.

Le courant induit dans un circuit est tel qu'il crée un flux induit, qui s'oppose à toute variation du flux de \vec{B} dans le circuit

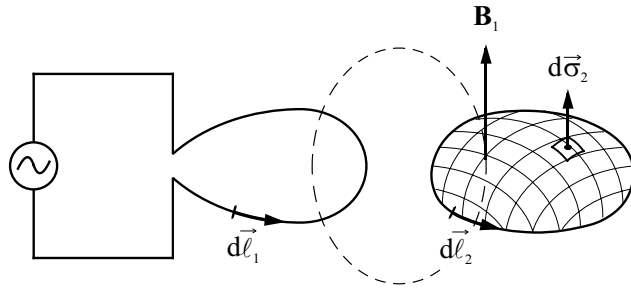
ou

La force exercée par \vec{B} sur le courant induit créé dans une spire s'oppose au déplacement de la spire.

- **Inductance mutuelle**

ε_{12} = f.e.m. induite dans le circuit 2

$$\varepsilon_{12} = - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial t} = - M_{12} \frac{\partial i_1}{\partial t}$$



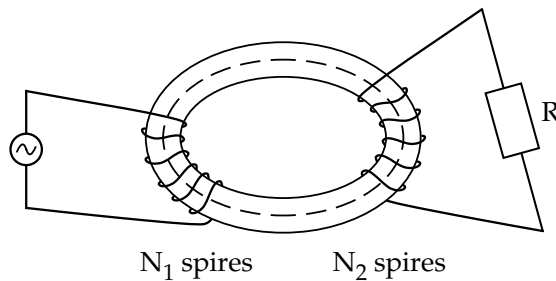
L'**inductance mutuelle** M_{12} est définie par :

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} \quad \text{où} \quad \Phi_{12} = \int \int_{\Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\sigma}_2 \quad [M] = \text{Henry} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}}$$

Pour un **tore** :

$$M = \mu_0 \mu_r N_1 N_2 \frac{S}{\ell}$$

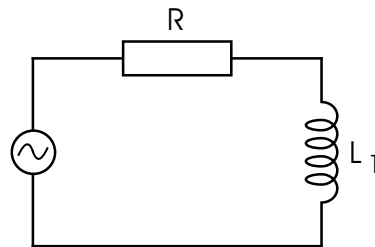
S = section du tore
 ℓ = circonférence moyenne du tore



- **Self-inductance**

ε_{11} = f.e.m. induite dans le solénoïde

$$\varepsilon_{11} = - \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial t} = - L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t}$$



La **self-inductance** L_1 est définie par :

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{i_1} \quad \text{où} \quad \Phi_{11} = \int \int_{\Sigma_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\sigma}_1$$

Pour un **tore** :

$$L_1 = \mu_0 \mu_r N_1^2 \frac{S}{\ell}$$

• L'énergie magnétique

L'**énergie magnétique** contenue dans une self-inductance est l'énergie qu'il faut fournir pour faire passer le courant de la valeur nulle à la valeur i :

$$U_{\text{magn.}} = \frac{1}{2} L i^2$$

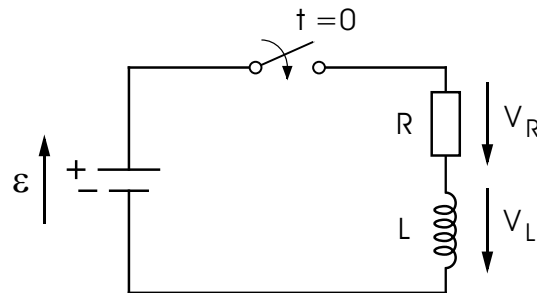
La **densité d'énergie magnétique** est donnée par

$$u_{\text{magn.}} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

• Charge d'un circuit RL

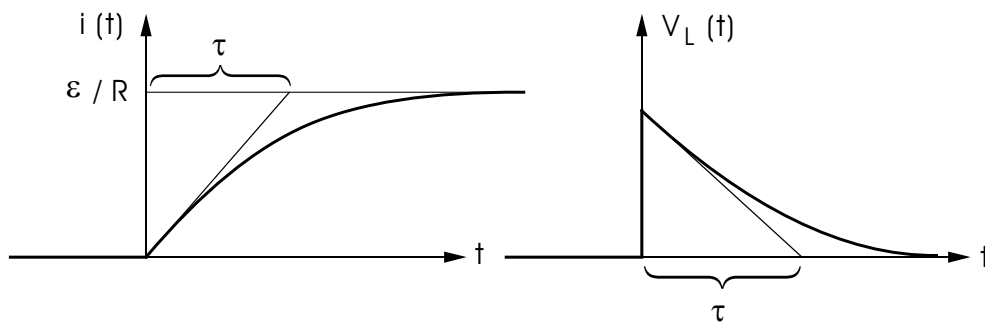
Equation du circuit :

$$\begin{aligned} \varepsilon + \varepsilon_{\text{ind.}} &= R i \\ \varepsilon &= R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned}$$



soit :

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{R}{L} i = \frac{\varepsilon}{L} \quad \text{où} \quad i(t = 0^+) = 0$$



$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

$$V_L(t) = \varepsilon e^{-t/\tau}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

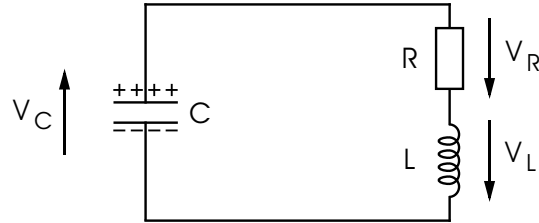
Lorsque $\omega \rightarrow 0$, une self-inductance se comporte comme un élément d'**impédance nulle** (court-circuit).

Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, une self-inductance se comporte comme un élément d'**impédance infinie**. Une self-inductance s'oppose aux variations rapides de courant.

- **Circuit RLC**

Equation du circuit :

$$V_C + V_R + V_L = 0$$



soit :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{1}{LC} i = 0$$

C'est un circuit **oscillant**, tel que

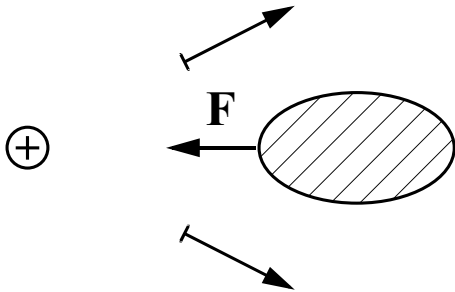
$$i(t) = i_0 \cdot \cos \omega_0 t \cdot e^{-\alpha t}$$

$$\text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$

Les champs électriques et magnétiques dans la matière

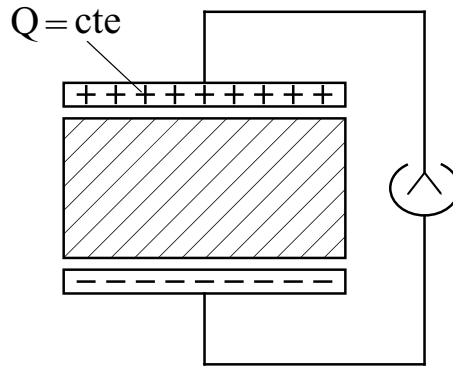
Partie 1 : Les champs électriques dans la matière diélectrique

- Deux phénomènes à analyser :



$$\vec{F} \sim \chi \text{ grad} \left(\epsilon_0 \frac{E^2}{2} \right) \cdot \text{volume}$$

χ = susceptibilité diélectrique



$$V_{\text{avec diél.}} < V_0 \text{ sans diél.}$$

$$C = \epsilon C_0$$

ϵ = constante diélectrique

Ces deux phénomènes sont reliés à la présence de **moments électriques dipolaires** dans la matière diélectrique.

- **Moments dipolaires** \vec{p}

– **Définition:**

$$-q \bullet \xrightarrow{d} \bullet + q \qquad \vec{p} = q\vec{d}$$

– Un moment dipolaire est **induit** s'il n'apparaît qu'en présence d'un champ électrique

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$$

où α est la **polarisabilité électrique**.

– Un moment dipolaire est **permanent** s'il est non nul lorsque $\vec{E} = 0$ (ex. molécule H₂O).

– La **polarisation électrique** \vec{P} est une grandeur macroscopique définie par

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_i \vec{p}_i$$

où \vec{p}_i est le moment dipolaire contenu dans le volume $\Delta\Omega$. Un ensemble de molécules (ou d'atomes) en présence de \vec{E} se comporte différemment si les moments dipolaires sont induits ou permanents.

moment **induit**

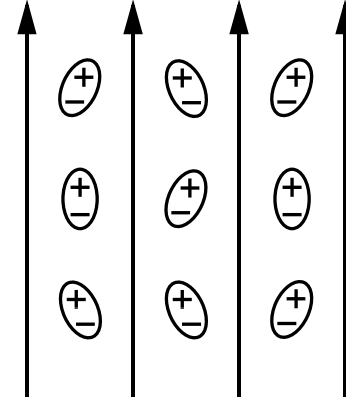
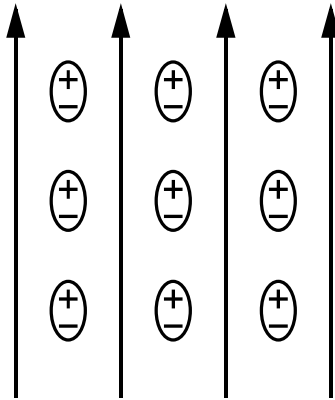
moment **permanent** \vec{p}

$$\vec{E} = 0$$

$$\vec{p}_i = 0 \quad \vec{P} = 0$$

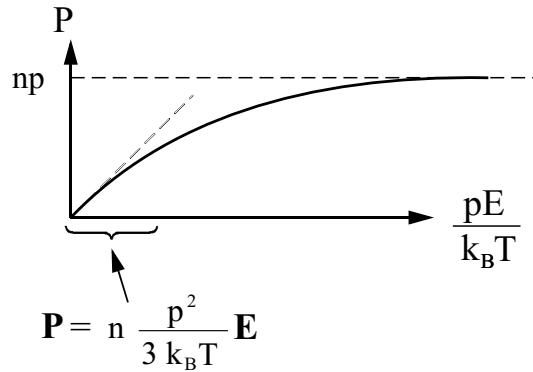
$$\vec{p}_i \neq 0 \quad \vec{P} = 0 \quad (\text{isotropie})$$

$$\vec{E} \neq 0$$

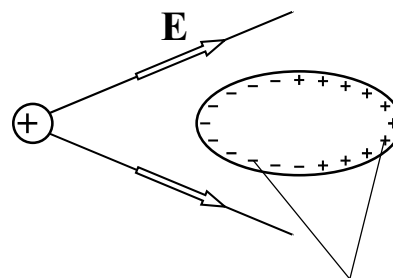
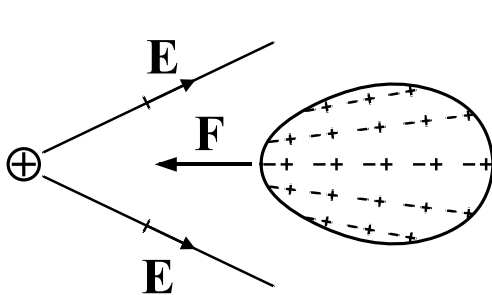


$$\vec{P} = n\epsilon_0\alpha\vec{E}$$

indépendant de T



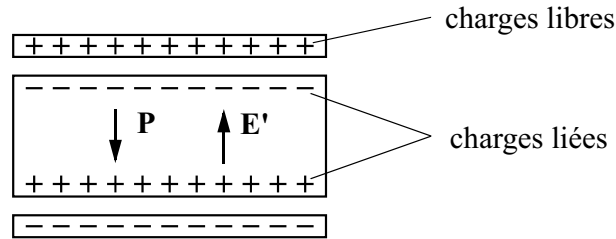
• La notion de charge liée



charges liées de surface

- En moyenne les charges se compensent à l'intérieur des diélectriques, il subsiste des charges en surface, dites **charges liées**.
- La présence de charges liées explique les deux phénomènes observés :
 - (1) échantillon attiré dans région où \vec{E} intense
 - (2) condensateur en présence du diélectrique (voir ci-dessous)

Explication qualitative de l'expérience du condensateur avec diélectrique :



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \Rightarrow |\vec{E}| < |\vec{E}_0| \Rightarrow V < V_0 \Rightarrow C > C_0$$

- **Les lois de l'électrostatique** dans la matière diélectrique ne sont **pas modifiées** pour les champs électriques et densité de charge microscopiques. La loi de Gauss doit être modifiée pour les champs moyens.

- **1ère loi**: elle n'est pas modifiée

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \vec{E} = -\text{grad } V \end{array} \right.$$

forme globale

forme locale

Cela implique qu'on peut toujours définir un potentiel électrique.

- **2ème loi** (loi de Gauss): elle est modifiée

Par analyse de l'expérience du condensateur, on montre que:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = \sum \text{charges libres} \qquad \text{div } \vec{D} = \rho_{\text{libre}}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \text{vecteur déplacement électrique}$$

Le fait que $\text{div } \vec{D}$ ne dépend que de la densité de charges libres ne signifie pas que \vec{D} ne dépend que des charges libres.

- **Susceptibilité diélectrique et constante diélectrique**

La **susceptibilité diélectrique** χ est définie par

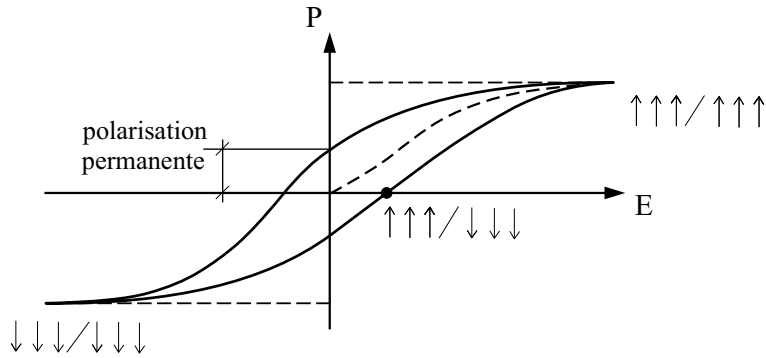
$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \qquad \text{où } \vec{E} = \text{champ total}$$

Soit

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

où $\epsilon = 1 + \chi$ est la constante diélectrique.

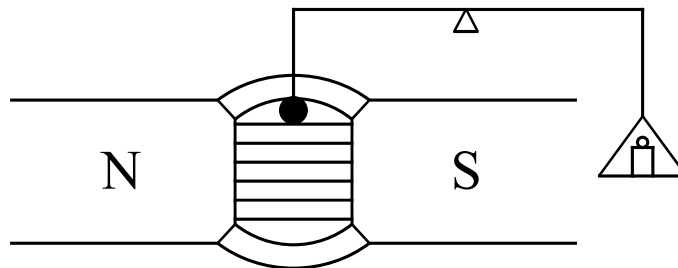
- Un matériau est dit **ferroélectrique** si les dipôles électriques permanents sont fortement couplés et s'alignent parallèlement les uns aux autres.



- Un cristal est dit **piézoélectrique** si sa polarisation électrique change lorsqu'on le soumet à une contrainte mécanique. Inversement, quand on soumet un cristal piézoélectrique à une tension électrique, il subit une déformation mécanique.

Partie 2 : Les champs magnétiques dans la matière

- Echantillon dans un champ magnétique inhomogène



Un échantillon placé dans un champ d'induction magnétique inhomogène subit une force \vec{F} .

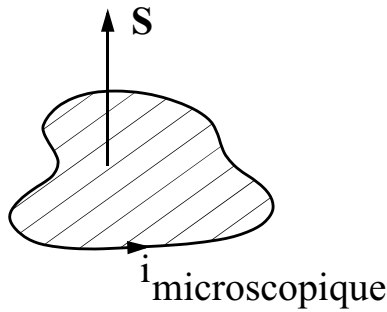
$$\vec{F} \sim \chi_m (\text{grad } B^2) \cdot \text{volume}$$

χ_m = susceptibilité magnétique

$\chi_m < 0$	(faiblement repoussé)	corps diamagnétique
$\chi_m > 0$	(faiblement attiré)	corps paramagnétique
$\chi_m \gg 1$	(fortement attiré)	corps ferromagnétique

- **Moment magnétique dipolaire**

Les propriétés magnétiques de la matière s'expliquent par la présence de **courants microscopiques** dans la matière, liés au mouvement des électrons autour du noyau, et au moment magnétique propre d'un électron.



\vec{S} = vecteur orthogonale à la surface sous tendue par i et d'amplitude égale à son aire (orienté selon normale d'Ampère)

Le **moment magnétique** $\vec{\mu}$ est défini par :

$$\vec{\mu} = i\vec{S}$$

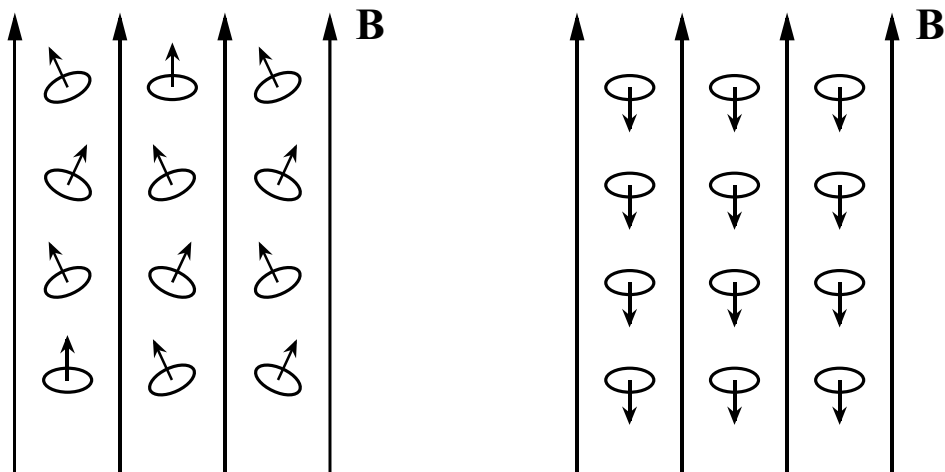
Un moment magnétique est **induit** s'il est créé par la présence de \vec{B} . Un moment magnétique induit est toujours opposé au champ \vec{B} qui l'a créé.

Certains atomes (ou molécules) portent des moments magnétiques même si $\vec{B} = 0$, on dit qu'ils portent un **moment magnétique permanent**.

- **L'aimantation** \vec{M} caractérise au niveau macroscopique les propriétés de la matière. Elle est définie par

$$\vec{M} = \frac{1}{\Delta\Omega} \sum_i \vec{\mu}_i$$

Un **ensemble de molécules** (ou d'atomes) en présence de \vec{B} se comporte différemment si les moments magnétiques sont induits ou permanents.



moments magnétiques **permanents**
 \vec{M} dans le sens de \vec{B}

moments magnétiques **induits**
 \vec{M} opposé à \vec{B}

- **Comportement paramagnétique et diamagnétique**

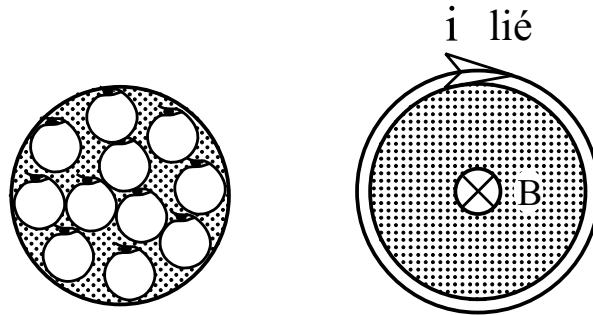
On montre que:

- un moment $\vec{\mu}$ dans le sens de \vec{B} est attiré dans les régions où \vec{B} est intense
- un moment dans le sens opposé à \vec{B} est repoussé des régions où \vec{B} est intense

Donc:

$$\begin{array}{llll} \vec{\mu} \text{ permanent} & \longrightarrow & \vec{M} \text{ dans sens } \vec{B} & \longrightarrow \text{paramagnétisme} \\ \vec{\mu} \text{ induit} & \longrightarrow & \vec{M} \text{ opposé à } \vec{B} & \longrightarrow \text{diamagnétisme} \end{array}$$

- **La notion de courant lié**



La superposition des courants i_μ s'annule à l'intérieur de l'aimant. Les courants à la surface de la matière aimantée s'ajoutent et donnent lieu à un **courant lié**.

La présence des courants liés explique l'analogie entre le champ \vec{B} d'un solénoïde et le champ \vec{B} d'un aimant cylindrique.

- **Les lois de magnétostatique dans la matière** ne sont **pas modifiées** pour les champs d'induction magnétique et les densités de courants **microscopiques**. La loi d'Ampère doit être **modifiée** pour les **champs moyens**.

- **1ère loi** : elle n'est pas modifiée

$$\int_{\Sigma \text{ fermé}} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

forme globale

$$\begin{array}{l} \text{div } \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{array}$$

forme locale

Cela implique qu'on peut toujours définir un potentiel vecteur \vec{A} .

- **2ème loi** (loi d'Ampère) : elle est modifiée

Par analyse de l'expérience d'un aimant cylindrique dans un solénoïde, on montre que

$$\int_{\Gamma \text{ fermé}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i_{\text{libre}}$$

forme globale

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}}$$

forme locale

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

- **Susceptibilité magnétique et perméabilité relative**

La **susceptibilité magnétique** χ_m est définie par

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Soit :

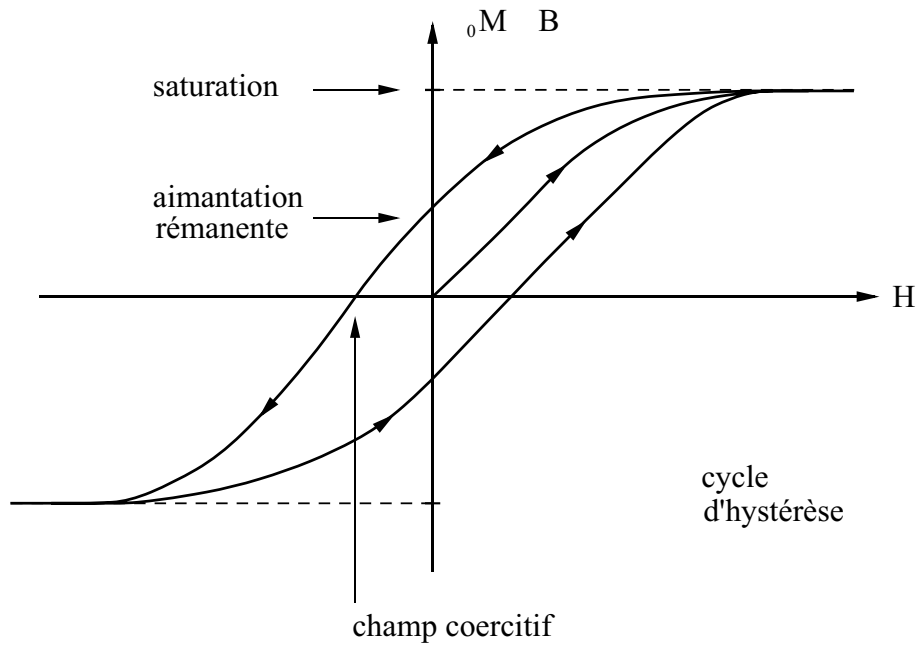
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

où $\mu_r = 1 + \chi_m$ est la **perméabilité relative**.

- **Les ferromagnétiques**

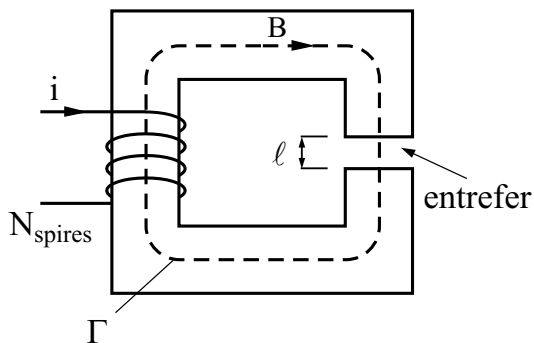
Un corps est dit **ferromagnétique** si les moments magnétiques sont parallèles les uns aux autres dans des domaines de faible dimension, dits **domaines de Weiss**.

Lorsqu'on soumet un corps ferromagnétique à un champ \vec{B} les domaines de Weiss dont l'aimantation est dans le sens de \vec{B} croissent, ce qui crée une aimantation \vec{M} globale de l'échantillon.



Au-dessus d'une température critique, dite **température de Curie**, le matériau perd son caractère ferromagnétique et devient paramagnétique.

- **L'électroaimant**



$$B = \mu_0 i \frac{N}{l + L/\mu_r}$$

- Le tore magnétique

tore magnétique de rayon R

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{2\pi R}$$

Résumé : magnétostatique et électrostatique

Electrostatique	Magnétostatique
$\int_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = Q_{\text{libre}}$ $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$ $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum i_{\text{libre}}$ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

avec les **relations phénoménologiques** pour un diélectrique linéaire :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

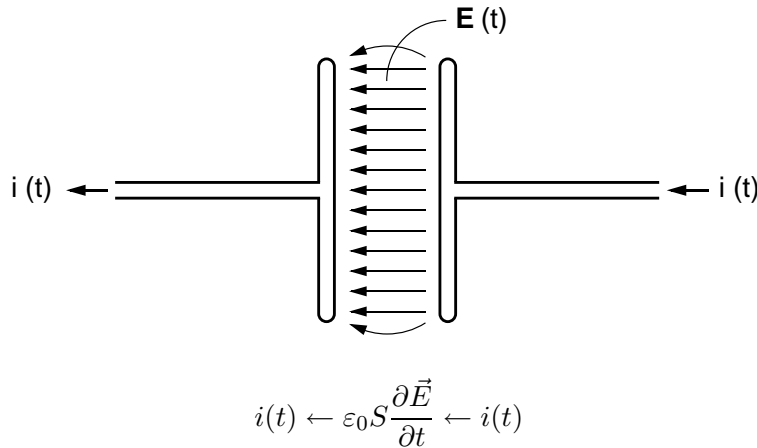
$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Les équations de Maxwell et les ondes E.M.

- Le courant de déplacement



Pour traduire le fait expérimental qu'un courant électrique $i(t)$ dépendant du temps peut s'écouler dans un circuit contenant des condensateurs, on introduit entre les plaques du condensateur un **courant de déplacement** tenant compte du "transfert de charge" par influence entre les plaques du condensateur. Le calcul montre que, entre les plaques, le courant $i(t)$ est remplacé par le courant de déplacement $\epsilon_0 S (\partial E / \partial t)$.

- La loi d'Ampère modifiée lorsque \vec{E} et \vec{B} dépendent du temps

La continuité du transfert de courant (continuité de la charge) implique dans le cas du condensateur plan que:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[i(t) + \epsilon_0 S \frac{\partial E}{\partial t} \right],$$

où Γ est un contour fermé enlaçant les courants $i(t)$.

De façon générale,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left[\sum i(t) + \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{\sigma} \right],$$

où Σ est une surface ouverte s'appuyant sur Γ , et \vec{D} est le vecteur déplacement.

Sous **forme locale**

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]$$

- Les équations de Maxwell

Forme globale

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} &= Q_{\text{libre}} & \oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} &= 0 \\ \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} & \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= i_{\text{libre}} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} \end{aligned}$$

Forme locale

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= \rho & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

auxquelles il faut ajouter les relations phénoménologiques suivantes:

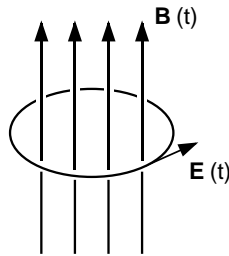
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

Dans le cas d'un milieu diélectrique linéaire et isotrope ces relations peuvent s'écrire:

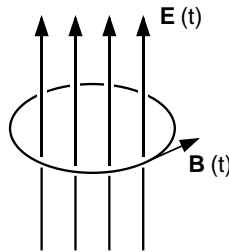
$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Il faut aussi ajouter une relation reliant \vec{j} et \vec{E} . Pour un métal, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

- Une conséquence importante des équations de Maxwell



$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &\rightarrow \vec{E}(t) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &\rightarrow \vec{B}(t) \end{aligned}$$

Le fait que $\vec{E}(t) \rightarrow \vec{B}(t) \rightarrow \vec{E}(t) \rightarrow \vec{B}(t)$ est à la base du mécanisme de propagation d'une onde E.M.

- Dérivation formelle d'une équation d'onde

On montre en partant des équations de Maxwell sous forme locale que dans le vide:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{B} \end{aligned}$$

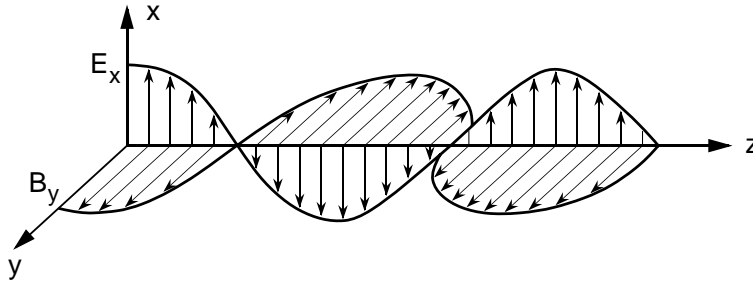
Il existe une équation d'onde pour chaque composante de \vec{E} , \vec{B} .

La vitesse de propagation de l'onde E.M. est donnée par:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

On vérifie que $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ est la **vitesse de la lumière**, les ondes lumineuses sont des ondes E.M.

- **Onde plane, sinusoïdale, polarisée linéairement**



$$\begin{cases} E_x = E_{x_0} \cos(kz - \omega t) \\ B_y = B_{y_0} \cos(kz - \omega t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \frac{E_{x_0}}{B_{y_0}} = c$$

- **Polarisation d'une onde**

De façon générale, le champ \vec{E} d'une onde plane se propageant dans la direction z s'écrit:

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_{x_0} \cos[kz - \omega t + \phi_x(t)] \\ E_y(z, t) = E_{y_0} \cos[kz - \omega t + \phi_y(t)] \end{cases}$$

Polarisation linéaire

Une onde est polarisée **linéairement** si, lors de la propagation, \vec{E} reste parallèle à une direction donnée.

$$\text{polarisation linéaire} \Leftrightarrow \Delta\phi(t) = \phi_x(t) - \phi_y(t) = 0 \text{ ou } \pi$$

Polarisation elliptique

Une onde est polarisée **elliptiquement** si, lors de la propagation, l'extrémité de \vec{E} décrit une ellipse dans le plan (x, y) .

$$\text{polarisation elliptique} \Rightarrow \Delta\phi(t) = \phi_x(t) - \phi_y(t) = \text{const.}$$

Dans le cas particulier où $\Delta\phi = \pm\pi/2$ et $E_{x_0} = E_{y_0}$, l'onde est **polarisée circulairement**.

Onde non polarisée

Pour une onde **non polarisée**, l'extrémité du vecteur \vec{E} se déplace de façon aléatoire dans le plan (x, y) .

$$\text{onde non polarisée} \Leftrightarrow \Delta\phi(t) \text{ fluctue rapidement}$$

La **lumière naturelle** est non polarisée.

- **Aspects énergétiques**

La **densité d'énergie E.M.** est donnée par:

$$u_{EM} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Pour une onde E.M. dans le vide:

$$u_{\text{électr.}} = u_{\text{magnét.}} \quad \text{et} \quad u_{EM} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Le **vecteur de Poynting** \vec{S} indique le sens et la direction de propagation de l'énergie E.M. Par définition,

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

$\|\vec{S}\|$ correspond à l'énergie E.M. instantanée transmise par unité de temps et de surface à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation.

La moyenne temporelle de $\|\vec{S}\|$ est **l'intensité** I de l'onde E.M.:

$$I = \langle \|\vec{S}\| \rangle = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

Pour une onde sinusoïdale,

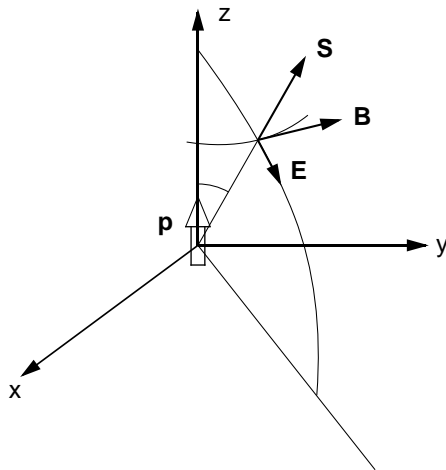
$$I = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2$$

La **quantité de mouvement** par unité de volume d'une onde E.M. est donnée par:

$$\vec{g} = \vec{S}/c^2$$

La **pression de radiation** correspondante est $\langle S \rangle/c$ pour une surface absorbante et $2\langle S \rangle/c$ pour une surface réfléchissante.

- **Champs \vec{E} et \vec{B} d'un dipôle électrique oscillant**



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} |\ddot{p}(t - r/c)| \sin \theta$$

$$B = E/c$$

avec r très grand devant les dimensions du dipôle.

La **puissance émise** par un dipôle $p(t) = p_0 \cos \omega t$ est égale à:

$$\oiint_{\Sigma} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{\sigma} = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

où Σ est une surface fermée entourant le dipôle.

Optique géométrique

- Réflexion

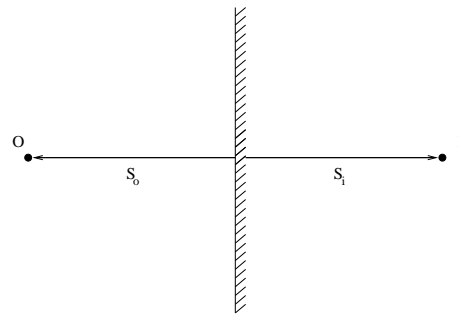
- Loi de la réflexion

1. $\theta_i = \theta_r$
2. Rayon incident, rayon réfléchi et normale à la surface séparant les deux milieux sont dans le même plan.

- Miroir plan

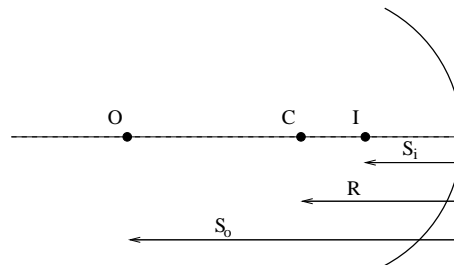
$$S_o = -S_i$$

distance objet = distance image



- Miroir sphérique

$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{2}{R}$$



Dans cette figure de référence, toutes les distances sont prises positives par convention. Les autres cas peuvent être retrouvés à partir de la figure de référence en prenant la distance (S_o , R , ou S_i) avec signe négatif quand le point correspondant (O , C , ou I) se trouve de l'autre côté du miroir.

Grandissement:

$$G = -\frac{S_i}{S_o}$$

Quand $G < 0$, l'image est inversée.

• Réfraction

– Loi de la réfraction

1. $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$
2. Rayon incident, rayon réfracté et normale à la surface séparant les deux milieux sont dans le même plan.

Angle de réflexion totale:

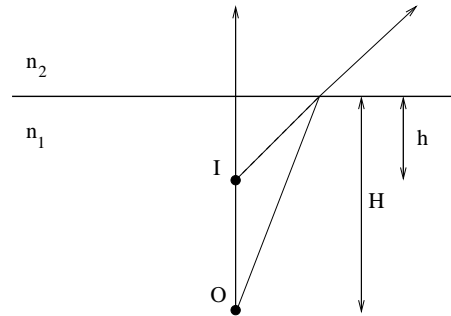
$$\sin \theta_{iRT} = \frac{n_t}{n_i}$$

Angle de Brewster:

$$\tan \theta_{iB} = \frac{n_t}{n_i}$$

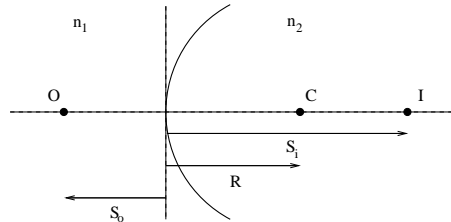
– Interface plane

$$h = \frac{n_2}{n_1} H$$



– Interface sphérique

$$\frac{n_1}{S_o} + \frac{n_2}{S_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$



Convention de signe: les distances sont prises positives pour cette figure de référence. Il faut prendre la distance (S_o , R , ou S_i) avec signe négatif quand le point correspondant (O , C , ou I) se trouve du côté opposé de l'interface.

– Formule des lentilles minces

$$\frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i} = \frac{1}{f}$$

où

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n'}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Les conventions de signe pour S_o et S_i sont les mêmes que pour l'interface sphérique. Par exemple, pour une lentille biconvexe, on trouve $f > 0$. Pour une lentille biconcave, $f < 0$.

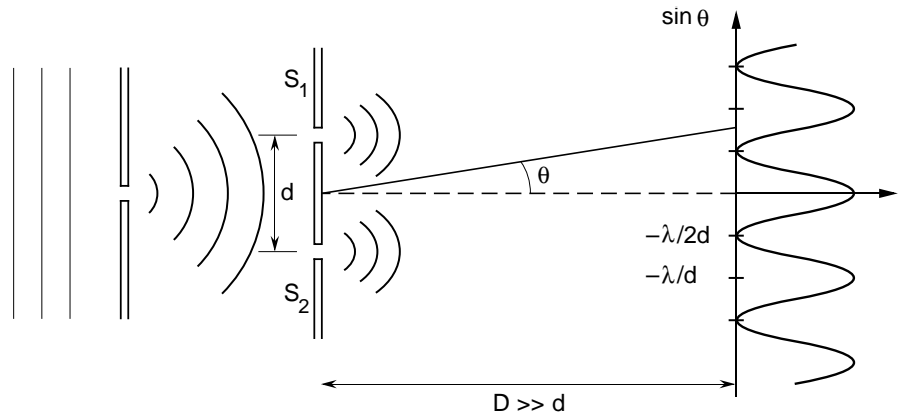
Optique physique: interférence et diffraction

- **Notion de cohérence**

L'**interférence** est un phénomène qui résulte de la superposition de deux ondes **cohérentes**. Deux sources S_1 et S_2 émettent des ondes **cohérentes** si elles ont la même fréquence et si leur différence de phase $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ reste constante au cours du temps.

- **Interférence de deux ondes lumineuses**

Les sources S_1 et S_2 sont cohérentes car issues d'une même source.



L'intensité lumineuse est donnée par:

$$I = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{d\pi \sin \theta}{\lambda} \right)$$

Interférence constructive: $d \sin \theta = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$

Interférence destructive: $d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$

- **Interférence produites par des films minces**

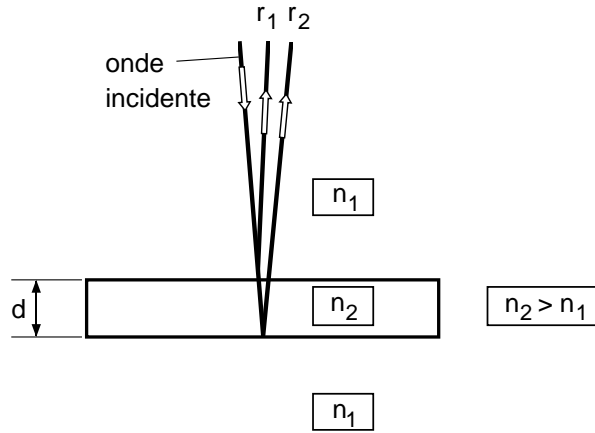
Pour analyser les phénomènes d'interférences dans les films minces, il faut tenir compte des données suivantes:

- Une onde réfléchiée par une interface séparant deux milieux d'indices de réfraction n_1 et n_2 , est déphasée de π si $n_1 < n_2$ et n'est pas déphasée si $n_1 > n_2$ (dans les deux cas l'onde provient du milieu d'indice n_1).
- La longueur d'onde dans un milieu d'indice n est donnée par:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \text{où } \lambda_0 \text{ est la longueur d'onde dans le vide}$$

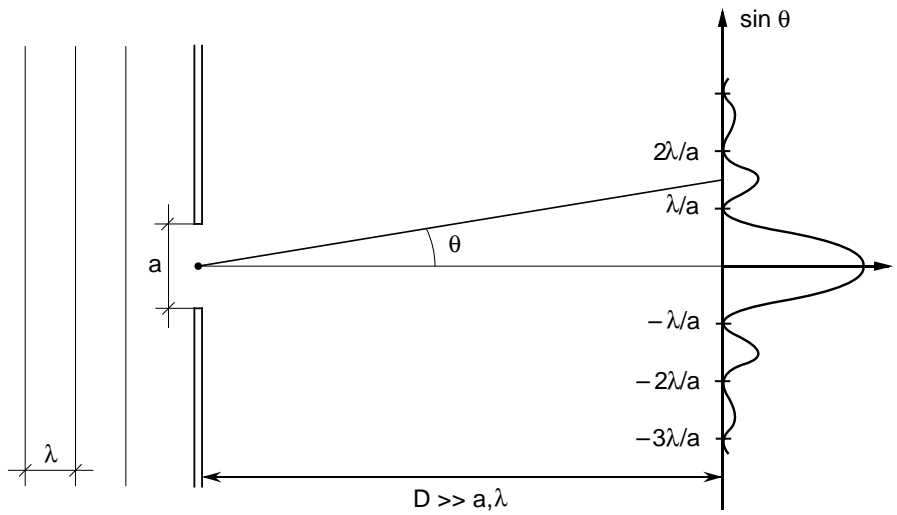
Exemple:

$$\phi(r_2) - \phi(r_1) = 2\pi \cdot \frac{2d}{\lambda_0/n} - \pi$$



• **Diffraction de Fraunhofer d'une seule fente**

L'onde en un point P de l'écran résulte de la superposition des ondes secondaires émises par chaque élément de surface infinitésimal de la fente (**principe de Huygens**).



$$I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \text{où } \alpha = \frac{ka \sin \theta}{2} = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

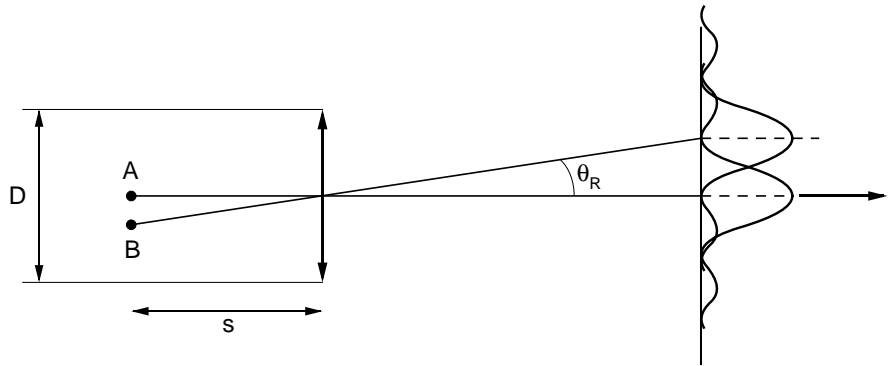
Les minima de la figure de diffraction sont tels que:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a}, \quad \text{avec } m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

et $\sim 90\%$ de l'intensité est dans le pic central (largeur $\sim \lambda/a$).

- **Pouvoir de résolution d'un instrument d'optique**

Le **pouvoir de résolution** d'un instrument d'optique est la distance minimum entre deux points A et B qui permette encore de distinguer leurs images. Il est limité par la diffraction causée par la taille finie (diamètre D) de la lentille d'entrée.



Le premier minimum de diffraction pour une **ouverture circulaire** de diamètre D est donné par:

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (\text{diffraction de Fraunhofer})$$

Le **critère de Rayleigh** détermine l'angle minimum θ_R pour lequel on peut encore distinguer les images de deux sources proches. Il est donné par:

$$\sin \theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

Cette condition impose que le premier minimum d'une source correspond au maximum de l'autre. On en déduit la distance AB minimum:

$$AB_{\min} \approx 0.61 \lambda \frac{s}{D/2}$$

- **Le réseau**

Un **réseau** en transmission (ou réflexion) est formé d'un grand nombre de fentes (ou raies gravées) de largeur a séparées par une distance d . Pour une longueur d'onde donnée, la largeur d'une raie d'interférence est faible (interférences à plusieurs sources), ce qui permet d'utiliser le réseau pour analyser les diverses longueurs d'onde d'une onde lumineuse (spectroscopie à réseau). Pour analyser le comportement du réseau, il faut tenir compte du fait que l'on observe simultanément **l'interférence et la diffraction**. L'intensité des franges d'interférences est modulée par l'intensité de la diffraction.

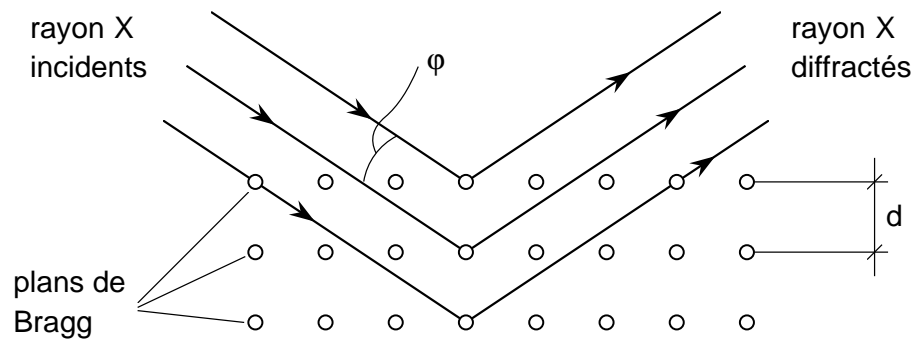
Pour **deux sources** de largeur a distantes de d ,

$$I = I_0 \cdot 4 \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \text{où } \alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

Pour **N sources** de largeur a distantes de d ,

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2 (N \pi d \sin \theta / \lambda)}{\sin^2 (\pi d \sin \theta / \lambda)} \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \text{où } \alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

• Diffraction des rayons X



Condition de **diffraction de Bragg**:

$$2d \sin \varphi = m\lambda, \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z}$$

ou encore, en posant $\theta = \pi/2 - \varphi$,

$$2d \cos \theta = m\lambda, \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z}$$

Optique physique: la lumière polarisée

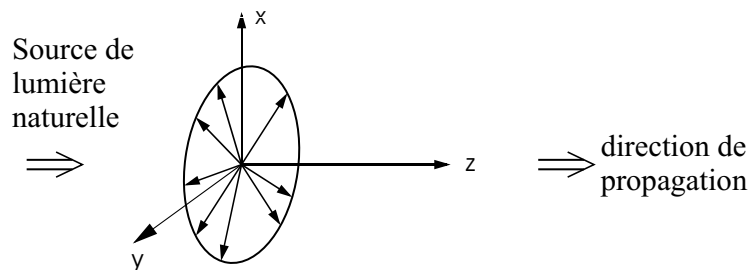
- **Onde polarisée linéairement**

Une onde EM est dite **polarisée linéairement** si, lors de la propagation de l'onde, le vecteur \vec{E} (et \vec{B}) reste parallèle à une direction donnée:

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_0 \cos \theta \sin[kz - \omega t + \phi(t)] \\ E_y(z, t) = E_0 \sin \theta \sin[kz - \omega t + \phi(t)] \end{cases}$$

Onde sinusoïdale, se propageant selon z , polarisée linéairement, dont le vecteur \vec{E} forme un angle θ par rapport à l'axe x [$\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$].

La **lumière naturelle** n'est pas polarisée:

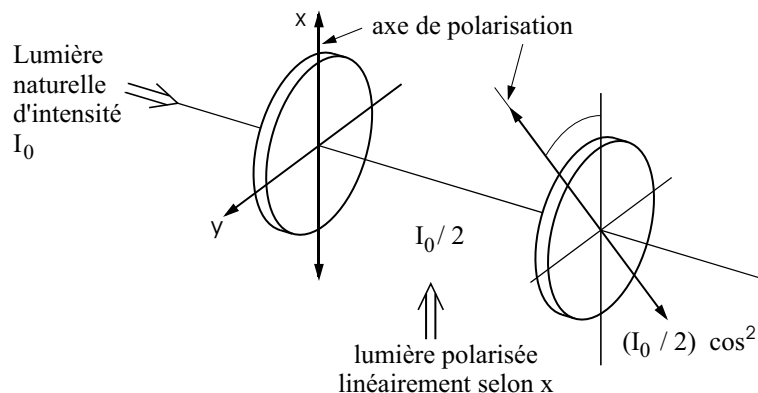


$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_0 \sin[kz - \omega t + \phi_x(t)] \\ E_y(z, t) = E_0 \sin[kz - \omega t + \phi_y(t)] \end{cases}$$

$\phi_x(t)$ et $\phi_y(t)$ fluctuent indépendamment.

- **Loi de Malus et polariseur**

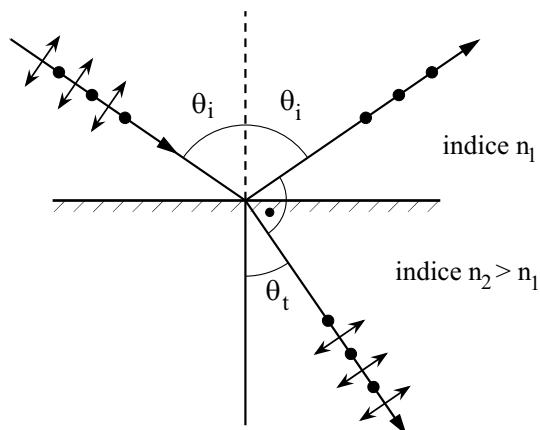
Un **polariseur** est formé d'un matériau qui ne laisse passer que la composante du champ électrique selon une direction donnée, notée axe de polarisation:



L'intensité lumineuse après le second polariseur est donnée par la **loi de Malus**:

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta$$

- Polarisation par réflexion



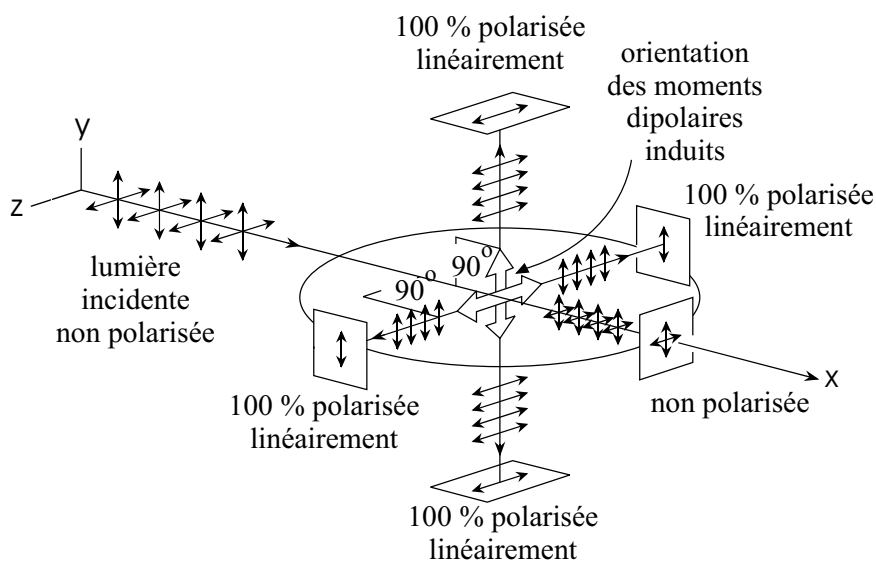
L'angle de **Brewster** θ_i est tel que:

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan \theta_i = \frac{n_2}{n_1}$$

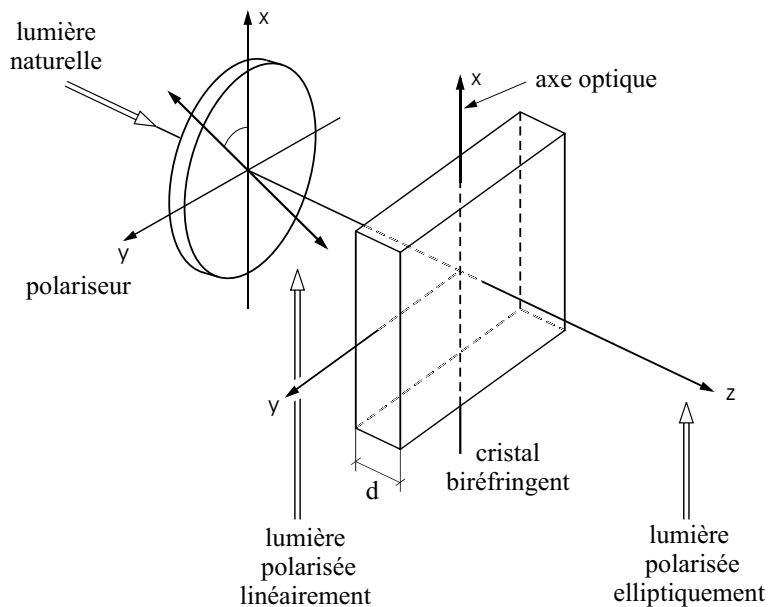
Lorsque une onde lumineuse (non polarisée) est **incidente** avec un angle θ_i égal à l'**angle de Brewster** sur la surface de séparation de deux milieux d'indice n_1 et n_2 ($n_2 > n_1$), seule la composante du champ électrique parallèle à la surface de séparation est réfléchi. L'**onde réfléchi est linéairement polarisée**.

- Polarisation par diffusion

Une onde lumineuse, par exemple émise par le soleil, incidente sur les molécules de l'atmosphère induit des dipôles électriques. L'onde EM alors réémise par les dipôles (onde diffusée) est totalement ou partiellement polarisée:



- **Cristal biréfringent uniaxe**



Dans un **cristal biréfringent uniaxe**, la célérité de l'onde dont le champ \vec{E} est orienté selon l'axe optique ($\vec{E} \parallel \hat{x}$) est différente de la célérité de l'onde dont le champ \vec{E} est perpendiculaire à l'axe optique ($\vec{E} \parallel \hat{y}$).

Si les composantes E_x et E_y de l'onde sont en phase avant le passage à travers le cristal biréfringent, elles sont alors **déphasées** de $\Delta\phi$ à la sortie du cristal:

$$\Delta\phi = \frac{\omega}{c}(n_1 - n_2)d = 2\pi(n_1 - n_2)\frac{d}{\lambda}$$

où n_1 est l'indice de réfraction pour $\vec{E} \parallel$ axe optique, n_2 l'indice de réfraction pour $\vec{E} \perp$ axe optique, et d l'épaisseur du cristal.

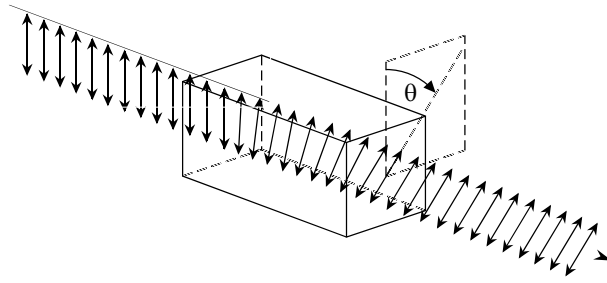
- **Lame 1/2 onde et 1/4 onde**

- Une **lame demi-onde** est un cristal biréfringent tel que $\Delta\phi = \pi$. Elle transforme une onde polarisée avec \vec{E} formant un angle θ par rapport à x , en une autre onde polarisée avec \vec{E} formant un angle $-\theta$ par rapport à x .
- Une **lame quart d'onde** est un cristal biréfringent tel que $\Delta\phi = \pi/2$. Une onde polarisée linéairement et formant un angle $\theta = 45^\circ$ par rapport à l'axe optique du cristal biréfringent est transformée en une onde polarisée **circulairement** après passage de la lame 1/4 onde (l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit en fonction du temps un cercle dans le plan (x, y) pour une valeur de z donnée):

$$\begin{cases} E_x(z, t) &= E_0 \sin[kz - \omega t + \phi(t)] \\ E_y(z, t) &= \pm E_0 \cos[kz - \omega t + \phi(t)] \end{cases}$$

Le signe $+$ ou $-$ détermine le sens de rotation.

- Un **milieu optiquement actif** est un milieu qui fait tourner la direction de polarisation d'une onde linéairement polarisée.



La nature quantique du rayonnement

• Le rayonnement du corps noir

Un **corps noir** est un corps qui absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit.

Le **rayonnement du corps noir** est le rayonnement qui règne à l'intérieur d'une cavité à l'équilibre thermique. Il ne dépend que de la température de la cavité.

La **densité d'énergie monochromatique** u_ν (u_λ) est définie par

$$\begin{aligned} u_\nu d\nu &= \text{densité d'énergie de fréquence comprise entre } \nu \text{ et } \nu + d\nu \\ u_\lambda d\lambda &= \text{densité d'énergie de longueur d'onde comprise entre } \lambda \text{ et } \lambda + d\lambda \end{aligned}$$

Loi de Stefan-Boltzmann

L'énergie EM émise par unité de surface et par unité de temps par un corps noir à température T est donnée par

$$R = \sigma T^4 \quad \text{où} \quad \sigma = 5.682 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$$

On montre que la **densité d'énergie EM** $u(T)$ est reliée à R par $R = cu(T)/4$.

Loi de Wien

La longueur d'onde λ_m correspondant au maximum de u_λ est telle que

$$\lambda_m T = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ mK}$$

Loi de Planck

La variation de u_ν en fonction de ν ne peut pas être expliquée dans le cadre des concepts de la physique classique. En suivant les idées proposées par Planck, on peut trouver l'expression correcte pour la densité d'énergie monochromatique en faisant les hypothèses suivantes:

- les états d'énergie possibles d'un oscillateur harmonique sont quantifiés,

$$E_n = nh\nu \quad \text{où} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$h = \text{constante de Planck} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

- les échanges d'énergie entre l'onde EM et les oscillateurs harmoniques de la paroi de la cavité sont quantifiés et tels que $\Delta E = h\nu$

Loi de radiation de Planck

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \qquad u_\lambda = 8\pi h c \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

- **Effet photoélectrique**

Une surface métallique irradiée par une onde EM de fréquence $\nu > \nu_{\text{seuil}}$ émet des électrons, c'est l'**effet photoélectrique**.

Pour expliquer l'effet photoélectrique, Einstein (1905) proposa que l'onde EM est formée de **photons**, dont l'énergie est localisée dans l'espace et dont la vitesse est égale à la vitesse de la lumière c . Un photon interagit avec un seul électron.

$$E = h\nu \text{ est l'énergie d'un photon}$$

Equation d'Einstein pour l'effet photoélectrique

$$h\nu = e\Phi + E_{\text{cin}}$$

$$e\Phi = \text{travail de sortie du métal} \quad E_{\text{cin}} = \text{énergie cinétique des électrons}$$

- **Effet Compton (1923)**

Compton constata que des rayons X de longueur d'onde λ diffractés par un solide ont une longueur d'onde λ' supérieure à λ . Cette expérience s'interprète en admettant qu'un photon de quantité de mouvement p entre en collision avec un électron au repos dans le solide. En écrivant que l'énergie relativiste et la quantité de mouvement sont conservées, on vérifie que

$$p = h/\lambda = \text{quantité de mouvement du photon}$$

- **Le photon**

Les expériences ci-dessus ne peuvent être expliquées que si l'on considère une onde EM comme formée de photons de masse nulle, dont l'énergie et la quantité de mouvement sont reliées à la fréquence et à la longueur d'onde de l'onde EM par

$$E = h\nu \qquad p = h/\lambda$$

Eléments de physique quantique

• Les relations de de Broglie

En 1924, le prince de Broglie a proposé d'attribuer à un corpuscule matériel une "onde de matière". Cette proposition a été confirmée par les expériences de Davisson et Germer (1927).

A une particule de masse au repos m_0 , de quantité de mouvement \vec{p} et d'énergie E , les relations de de Broglie associent une onde de vecteur d'onde \vec{k} et de fréquence ν , telle que

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \hbar \vec{k} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \hbar \omega \qquad \omega = 2\pi \nu$$

où $\hbar = h/2\pi = 1.0546 \cdot 10^{-34}$ J·s

Pour un **électron** accéléré avec une différence de potentiel V :

$$\lambda = \frac{1.22}{\sqrt{V}} \text{ nm} \qquad [V] = \text{volts}$$

• Fonction d'onde et équation de Schrödinger

– En physique quantique, l'**état d'une particule** à un instant t est caractérisé par sa **fonction d'onde** $\psi(\vec{x}, t)$.

– **Interprétation standard** de la fonction d'onde :

La probabilité d'observer la particule à l'instant t dans le volume d^3x est donnée par

$$dP(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$$

où $|\psi(\vec{x}, t)|^2 = \psi(\vec{x}, t) \cdot \psi^*(\vec{x}, t) =$ densité de probabilité.

La fonction d'onde $\psi(\vec{x}, t)$ est dite de carré sommable, c'est-à-dire

$$\iiint_{\text{l'espace}} |\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x = 1$$

– L'équation d'évolution de $\psi(\vec{x}, t)$ proposée par Schrödinger en 1926, est dite **équation de Schrödinger (dépendante du temps)**:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}, t)$$

où $V(\vec{x}) =$ énergie potentielle.

– Les solutions de l'équation de Schrödinger telles que

$$\psi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}) \cdot \chi(t)$$

sont dites solutions **stationnaires**, elles correspondent à une énergie E bien définie. On montre que

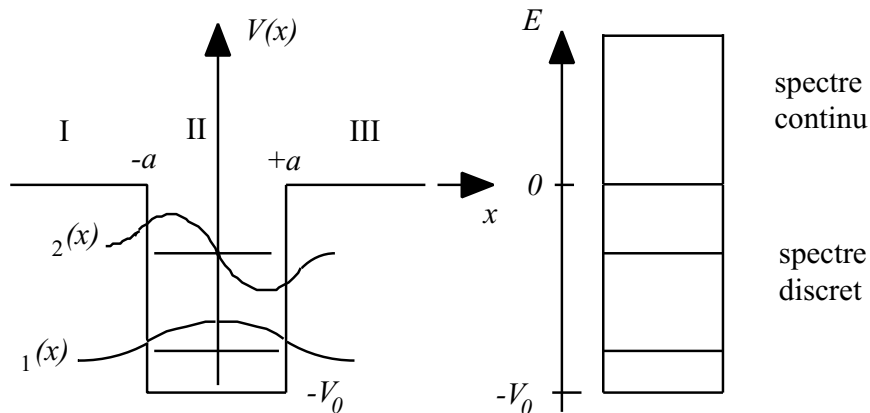
$$\psi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}) \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right)$$

où $\phi(\vec{x})$ est solution de **l'équation de Schrödinger indépendante du temps** (équation aux valeurs propres) :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x})\right) \phi(\vec{x}) = E \phi(\vec{x})$$

• Particule dans un puits de potentiel

L'équation de Schrödinger prévoit l'existence de **niveaux d'énergie discrets** pour une **particule confinée** dans un puits de potentiel.



$$E = E_{\text{cin}} + V(\vec{x}) = E_{\text{cin}} - V_0$$

Si $E < 0$ états **liés** - spectre d'énergie discret
 $E > 0$ états **non liés** - spectre d'énergie continu

– Puits de potentiel fini carré à une dimension

Pour trouver les niveaux d'énergie et fonctions d'onde $\phi(x)$, il faut résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les domaines I, II et III (voir dessin), écrire que la fonction d'onde est bornée si $x \rightarrow \pm\infty$, écrire que $\phi(x)$ et sa dérivée sont continues en $x = \pm a$, chercher les solutions qui sont normées.

On montre que ($E < 0$) :

- ◊ les niveaux d'énergie sont discrets
- ◊ $\phi(x)$ est non nul l'extérieur du puits de potentiel. Il existe une probabilité non nulle d'observer l'électron hors du puits de potentiel (spill-out)

– **Puits de potentiel carré infini à une dimension**

Dans ce cas les **énergies** et **fonctions d'onde** sont données par

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

– **Autres puits de potentiel**

Potentiel **harmonique** $V(x) = +kx^2$:

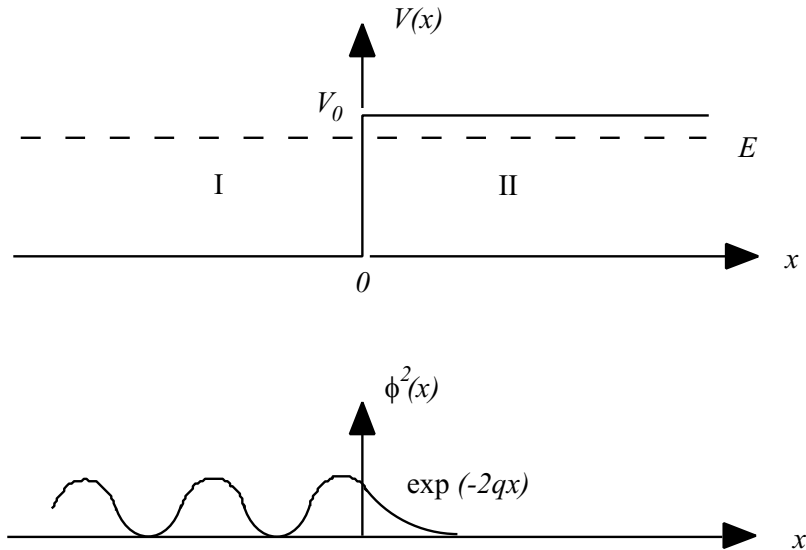
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Potentiel **Coulombien** (atome H) :

$$E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

• **Barrière de potentiel et effet tunnel**

– **Saut de potentiel carré** ($E < V_0$)



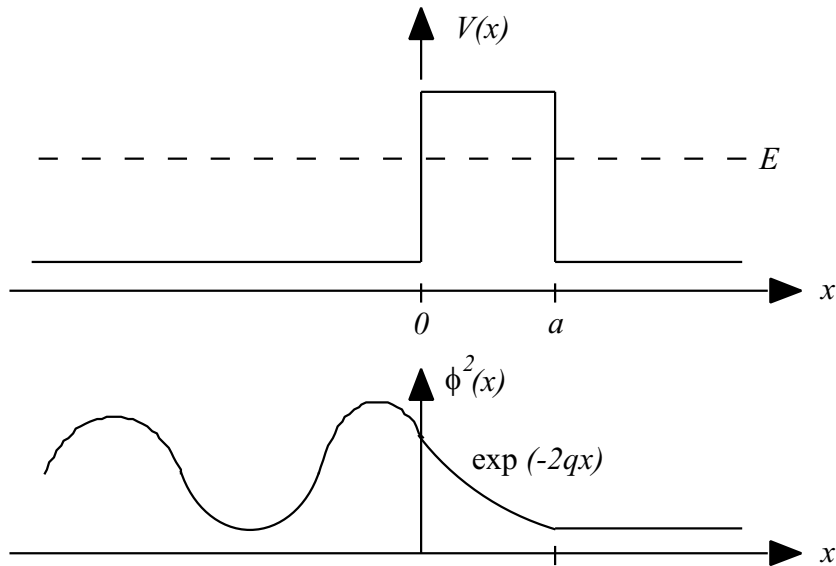
Pour résoudre ce problème, il faut chercher les solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les domaines I et II, écrire que $\phi(x)$ est borné si $x \rightarrow \pm\infty$, et les conditions aux limites en $x = 0$. On montre que :

$$\phi_1(x) = \underbrace{\exp(ikx)}_{\text{onde progr.}} + \underbrace{\frac{1 - iq/k}{1 + iq/k}}_{\text{norme 1}} \cdot \underbrace{\exp(-ikx)}_{\text{onde rétr.}}$$

$$\phi_2(x) = \frac{2}{1 + iq/k} \cdot \exp(-qx)$$

où $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

– Barrière de potentiel ($E < V_0$)



Le **coefficient de transmission** T est donné par

$$T \cong \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-2 \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} a\right)$$

• **Les relations d'incertitude**

Les **relations d'incertitude** sont une conséquence de l'aspect ondulatoire que la réalité nous oblige à associer à une particule matérielle.

On associe à une particule un **paquet d'onde** d'extension finie. On montre que l'extension Δx de la densité de probabilité $|\psi(x, t)|^2$ est reliée à l'extension Δk de la transformée de Fourier au carré de $\psi(x, 0)$ par

$$\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$$

En tenant compte des relations de de Broglie ($p = \hbar k$),

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim h/2\pi \quad \text{relation d'incertitude de Heisenberg}$$

Δx est le domaine de l'axe des x dans lequel on a une grande probabilité de trouver la particule si on fait une mesure pour déterminer sa position. De même, Δp_x est l'incertitude sur la détermination de la quantité de mouvement de la particule.

En d'autres termes, en augmentant la précision avec laquelle on détermine la position de la particule, on perd de l'information sur sa quantité de mouvement.